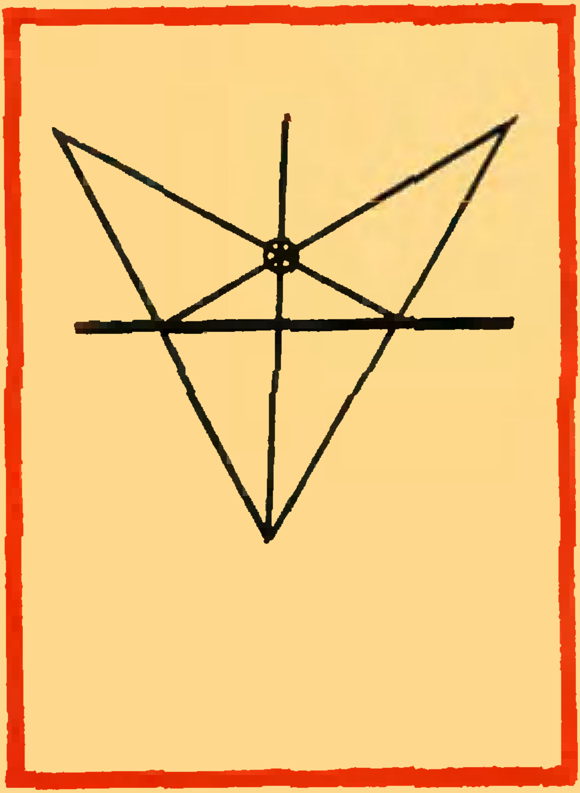


СБОРНИК ЗАДАЧ по элементарной ГЕОМЕТРИИ

Л. С. АТАНАСЯН, М. В. ВАСИЛЬЕВА, Г. Б. ГУРЕВИЧ,
А. С. ИЛЬИН, Т. Л. КОЗЬМИНА, О. С. РЕДОЗУБОВА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

ИЗДАНИЕ 3-е

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1970

«Сборник задач по элементарной геометрии» рекомендован Ученой комиссией по математике ГУВУЗа Министерства просвещения РСФСР в качестве учебного пособия для физико-математических факультетов педагогических институтов.

Сборник задач по элементарной геометрии. Пособие
С23 для пед. ин-тов. Изд. 3-е. М., «Просвещение», 1970.
96 с. Перед загл. авт.: Л. С. Атанасян и др.

2-2-2
15—70

513

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий сборник предназначен для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов; он находится в полном соответствии с составляемой в настоящее время новой программой единого курса геометрии в педвузах и геометрических разделов практикума по решению задач школьного курса математики и отражает идею единства всех геометрических дисциплин. При этом учтен опыт преподавания геометрических дисциплин в Московском ордена Трудового Красного Знамени государственном педагогическом институте имени В. И. Ленина.

Сборник может быть использован учителями математики средней школы при изучении геометрии по новой программе (в разделах: векторная алгебра и геометрические преобразования).

Сборник состоит из четырех частей. Первая часть — «Задачи на доказательство и на вычисление» — предназначена для студентов первого курса и соответствует программе раздела «Приложения преобразований плоскости к решению задач элементарной геометрии» и седьмого семестра практикума по решению задач, вторая часть — «Задачи на построение» — для студентов второго курса при изучении раздела «Геометрические построения на плоскости». В третьей части даны задачи по элементарной геометрии, решаемые методами аналитической геометрии; они найдут себе применение на первом курсе в тех разделах, которые охватывают основные вопросы аналитической геометрии. В последней части собраны задачи, к которым применимы методы проективной геометрии (1-й и 2-й разделы программы третьего семестра).

При составлении задачника авторы использовали значительное количество учебников, пособий и журнальной литературы. Примерный перечень использованной литературы дан в конце книги.

Кроме авторов, в работе принимали участие доцент кафедры геометрии МГПИ им. В. И. Ленина К. И. Дуничев и старший преподаватель кафедры Е. Е. Вересова.

Многие задачи снабжены ответами, для части задач даны краткие указания.

Третье издание отличается от второго лишь незначительными изменениями редакционного характера. Нумерация задач во втором и в третьем издании совпадает.

Авторы

ЧАСТЬ I

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

I. ВВЕДЕНИЕ

1. Ответить на следующие вопросы и обосновать ответ:

а) Почему все точки окружности равноудалены от центра?

б) Могут ли оба смежных угла быть тупыми?

в) Почему в равностороннем треугольнике углы равны между собой?

г) Даны две параллельные прямые. Сколько плоскостей можно провести через обе эти прямые?

д) Почему прямая, лежащая в плоскости двух параллельных прямых и пересекающая одну из них, пересечет и другую?

е) Почему две различные окружности при пересечении не могут иметь более двух общих точек?

2. Указать условие и заключение для следующих теорем:

а) Два треугольника равны, если три стороны одного соответственно равны трем сторонам другого.

б) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

в) В треугольнике против равных углов лежат равные стороны.

г) Произведение отрезков хорд, пересекающихся в одной точке внутри окружности, есть величина постоянная.

3. Для каждой из следующих теорем сформулировать теоремы: обратную, противоположную, обратную противоположной:

а) Если центральные углы равны, то равны и соответствующие им дуги.

б) Если данные углы равны, то и смежные с ними углы равны.

в) В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине есть медиана основания.

г) Если стороны двух острых углов соответственно параллельны, то углы равны.

д) Любая точка перпендикуляра, восставленного из середины отрезка, равно отстоит от концов отрезка.

4. Доказать методом от противного и сформулировать те противоположные обратным теоремы, которые при этом доказываются:

а) Если в четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то около него можно описать окружность.

б) Если две стороны и угол, лежащий против большей стороны, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему против большей из них, другого треугольника, то треугольники равны.

5. Сформулировать прямую и обратную теоремы и доказать их:

а) Для того чтобы медиана треугольника была равна половине стороны, которую она делит пополам, необходимо и достаточно, чтобы треугольник был прямоугольным.

б) Для того чтобы стороны угла ABC, пересекаемые рядом прямых DD', EE', FF', ..., рассекались ими на пропорциональные части, необходимо и достаточно, чтобы прямые DD', EE', FF' были параллельны между собой.

6. В следующих утверждениях многоточия заменить словами «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо»:

а) Для того чтобы выпуклый четырехугольник был прямоугольником, ..., чтобы его диагонали были равны.

б) Для того чтобы выпуклый четырехугольник был параллелограммом, ..., чтобы все его стороны были равны.

в) Для того чтобы выпуклый четырехугольник был прямоугольником, ..., чтобы все его углы были равны.

г) Для того чтобы выпуклый четырехугольник был ромбом, ..., чтобы его диагонали были равны.

7. Доказать методом математической индукции, что n прямых, каждые две из которых пересекаются и никакие три не имеют общей точки, разбивают плоскость на $\frac{n^2+n+2}{2}$ частей.

II. ПЛОСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Отрезок, угол, треугольник

8. Пусть точка M — середина отрезка AB; тогда расстояние CM равно абсолютной величине полуразности отрезков CA и CB, если точка C лежит на самом отрезке, и полусумме CA и CB, если точка C взята на продолжении AB. Доказать.

9. На стороне Ox угла xOx' отложены отрезки OA и OB, на стороне Ox' — отрезки OA' и OB', соответственно равные первым. C — точка пересечения отрезков AB' и $A'B$. Доказать, что C лежит на биссектрисе данного угла.

10. Доказать, что если внутри треугольника ABC можно выбрать точку D так, что отрезок DA равен стороне AB, то эта сторона меньше стороны AC.

11. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC равна стороне AD. Доказать, что сторона BC меньше диагонали BD.

12. Прямая, проходящая через вершину A и середину стороны BC треугольника ABC, одинаково удалена от вершин B и C. Доказать.

13. Доказать, что если две стороны треугольника не равны между собой, то медиана, заключенная между ними, образует с меньшей из этих сторон угол больший, чем с другой.

14. Доказать, что сумма расстояний точки от вершин треугольника больше полупериметра этого треугольника, а в случае, если точка лежит внутри или на контуре треугольника, та же сумма меньше его периметра.

15. Сумма медиан треугольника больше полупериметра и меньше периметра. Доказать.

16. Доказать, что треугольник будет равнобедренным, если он имеет: а) две равные высоты; б) две равные медианы; в) две равные биссектрисы.

17. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Если $AB > AC$, то какой из углов — ADB или ADC — больше и какой из отрезков — BD или CD — больше?

18. Доказать, что треугольники с равными периметрами и двумя соответственно равными углами равны.

19. В треугольнике ABC проведена высота AH. Рассмотрев следующие случаи:

а) углы ABC, ACB острые;

б) угол ABC тупой;

в) угол ABC прямой,

выяснить, в каком из них точка H лежит на отрезке BC, совпадает с одним из концов отрезка или лежит вне отрезка BC.

20. Доказать, что во всяком неравнобедренном треугольнике биссектриса лежит внутри угла, образованного медианой и высотой.

21. Два треугольника равны, если они имеют соответственно равные углы при основаниях и равные высоты (или биссектрисы), проведенные к этим основаниям. Доказать.

22. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если основание BC, медиана AE и высота AD одного треугольника соответственно равны основанию B_1C_1, медиане A_1E_1 и высоте A_1D_1 другого треугольника. Доказать.

23. Доказать, что в треугольнике, у которого разность углов при основании равна прямому углу, биссектриса внутреннего угла при вершине равна биссектрисе внешнего угла при той же вершине.

Параллельные прямые, параллелограммы и трапеции

24. На катетах прямоугольного треугольника ACB вне его построены два квадрата $ABDE$ и $ACHK$. Из точек D и H на продолжение гипотенузы опущены два перпендикуляра HM и DN. Доказать, что сумма перпендикуляров HM и DN равна гипотенузе.

25. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки E и D так, что $AE = AC$; $BD = BC$.

Доказать, что $\angle DCE$ равен 45° или 135°.

26. Доказать, что в равностороннем треугольнике сумма расстояний всякой точки, взятой внутри этого треугольника, до сторон его, есть величина постоянная, равная высоте треугольника.

27. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из вершины того же угла.

28. В треугольнике ABC через точку пересечения биссектрис проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках B_1 и C_1. Доказать, что отрезок $B_1C_1 = BB_1 + CC_1$.

29. Доказать, что если в шестиугольнике противоположные стороны равны и параллельны, то три его диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

30. Доказать, что биссектрисы внутренних (или внешних) углов параллелограмма в пересечении образуют прямоугольник, диагональ которого равна разности (или сумме) соседних сторон параллелограмма.

31. Доказать, что биссектриса внешнего угла параллелограмма вместе с его сторонами (или их продолжениями), не проходящими через вершину этого угла, образует равнобедренный треугольник, сумма боковых сторон которого равна периметру параллелограмма.

32. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина CB, N — середина CD. Доказать, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

33. Пусть E и F — середины параллельных сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Доказать, что прямые BE и FD делят диагональ AC на три равные части.

34. Доказать, что два параллелограмма, вписанных один в другой (вершины первого соответственно лежат на четырех сторонах второго), имеют общий центр.

35. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC биссектрисы равных углов A и C пересекают противоположные стороны соответственно в точках E и F. Доказать, что четырехугольник $AFEC$ есть трапеция с тремя равными сторонами.

36. Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен их полуразности.

37. Доказать, что биссектрисы углов, прилежащих к одной из непараллельных сторон трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции.

38. Если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция.

39. В четырехугольнике $ABCD$ точки M, N, P и Q являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD и DA. Доказать, что отрезки MP и QN в точке пересечения делятся пополам.

40. Доказать, что в четырехугольнике с непараллельными противоположными сторонами середины диагоналей и середины двух противоположных сторон есть вершины некоторого параллелограмма.

41. Доказать, что в четырехугольнике с непараллельными противоположными сторонами три прямые, соединяющие середины противоположных сторон и середины диагоналей, пересекаются в одной точке.

42. Доказать, что четырехугольник, вершинами которого являются центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к нему извне, есть квадрат.

43. Прямая пересекает параллельные стороны квадрата; вторая прямая, перпендикулярная первой, пересекает две другие стороны квадрата. Доказать, что отрезки этих прямых, ограниченные точками пересечения со сторонами квадрата, равны между собой.

44. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $ABDE$ и $BCKF$. Доказать, что отрезок DF в два раза больше медианы BP треугольника.

Окружность

45. Доказать, что наименьшее расстояние между точками двух окружностей, лежащих одна вне другой, есть отрезок линии центров, заключенный между окружностями.

46. К двум окружностям с центрами O и O_1, касающимся извне в точке A, проведена общая касательная BC (B и C — точки касания). Доказать, что $\angle BAC$ прямой.

47. Через одну из точек пересечения двух окружностей проведена секущая MN (M и N — другие две точки пересечения секущей с окружностями). Доказать, что отрезок MN будет наибольшим, если секущая параллельна линии центров.

48. Две прямые, проходящие через точку M, касаются окружности в точках A и B. На меньшей из двух образовавшихся дуг берут произвольную точку C и через нее проводят третью касательную до пересечения с MA и MB в точках D и E. Доказать, что периметр треугольника MDE и угол DOE не меняются при изменении положения точки C.

49. По углам между противоположными сторонами вписанного в окружность выпуклого четырехугольника определить углы этого четырехугольника.

50. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точки A и B проведены соответственно секущие MAN и PBQ (точки M и P лежат на одной окружности, точки N и Q — на другой). Доказать, что MP параллельна NQ. Как изменится задача, если точки Q и N совпадут?

51. Сформулировать и решить предыдущую задачу для того случая, когда окружности касаются друг друга.

52. Даны угол и на одной из его сторон две точки A и B. На другой стороне угла найти такую точку C, чтобы угол ACB достигал максимума.

53. Доказать, что отрезок произвольной касательной к окружности, заключенный между двумя параллельными касательными к той же окружности, виден из центра под прямым углом.

54. Доказать, что сумма диаметров окружностей, вписанной в прямоугольный треугольник и описанной около него, равна сумме его катетов.

55. Биссектрисы углов B и C при основании равнобедренного треуґольника ABC пересекаются в точке E и при продолжении встречают окружность, описанную около этого треугольника, в точках D и F. Доказать, что четырехугольник $EDAF$ — ромб.

56. Доказать, что окружность, проходящая через ортоцентр треугольника и любые две его вершины, равна окружности, описанной около треугольника.

57. Доказать, что во всяком треугольнике точки, симметричные с ортоцентром (точка пересечения высот) относительно трех сторон треугольника, лежат на описанной окружности.

58. Доказать, что биссектрисы углов любого четырехугольника при пересечении образуют четырехугольник, который может быть вписан в окружность. То же имеет место для биссектрис внешних углов.

59. Две окружности внешне касаются, и к ним проведена общая внешняя касательная. На отрезке касательной, заключенном между точками касания, как на диаметре построена окружность. Доказать, что она касается линии центров.

60. Окружность пересекает две концентрические окружности: одну — в точках A и B, другую — в точках C и D. Доказать, что хорды AB и CD параллельны.

61. Из всех треугольников с одним и тем же основанием и одним и тем же углом при вершине найти треугольник с наибольшим периметром.

62. Доказать, что высоты треугольника являются биссектрисами углов треугольника, образованного их основаниями.

63. Доказать, что высота AD треугольника ABC и радиус описанной окружности, проведенный к вершине A, образуют равные углы со сторонами AB и AC.

64. Противоположные стороны выпуклого четырехугольника продолжены до пересечения и около образовавшихся четырех треугольников описаны окружности. Доказать, что все они пересекаются в одной точке.

65. Равносторонний треугольник вписан в окружность. Доказать, что расстояние всякой точки дуги, стягиваемой какой-нибудь из его сторон, от противолежащей вершины равно сумме расстояний той же точки от остальных вершин.

66. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных

из любой точки окружности на три стороны вписанного треугольника, лежат на одной прямой (прямая Симпсона).

67. Доказать, что центр S описанной окружности, ортоцентр H и центр тяжести G треугольника лежат на одной прямой (прямая Эйлера).

68. Доказать, что во всяком треугольнике отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей, делится описанной окружностью пополам.

Задачи на вычисление

69. Дан $\angle XOY = 60°$. Из точки M вне его опущены на стороны перпендикуляры MA и MB, длины которых n_1 и n_2. Из той же точки M опущен перпендикуляр MC на биссектрису $\angle XOY$. Определить длину OC.

70. В треугольник, длины сторон которого равны a, b и c, вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она, пересекая первые две стороны, разделяет данный треугольник на две фигуры: треугольник и четырехугольник. Найти периметр полученного треугольника.

71. В окружность вписан треугольник ABC. Зная углы B и C, определить угол между стороной BC и касательной к окружности в точке A.

72. В равнобочной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Средняя линия трапеции равна m. Найти высоту трапеции.

73. В равнобочной трапеции диагональ делит тупой угол пополам. Большее основание менее периметра на a метров, а средняя линия равна b метрам. Определить меньшее основание.

74. В трапеции средняя линия делится диагоналями на три равные части. Найти отношение меньшего основания к большему.

75. Прямоугольная трапеция делится диагональю на два треугольника: равносторонний со стороной a и прямоугольный. Определить среднюю линию трапеции.

76. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Найти ее диаметр, если известны гипотенуза c и сумма s катетов.

77. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Определить радиус окружности, касательной к ним и к их общей внешней касательной.

78. Определить отношение сторон прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанной около него окружности относится к радиусу вписанной в него окружности, как $5 : 2$.

79. Вычислить стороны равнобочной трапеции по ее периметру $2p$ и диагонали d, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность.

III. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Движение в плоскости

80. Доказать, что произведение двух параллельных перенесений есть также параллельное перенесение.

81. Доказать, что окружность при симметрии относительно точки на плоскости переходит в равную ей окружность.

82. Доказать, что произведение двух центральных симметрий на плоскости представляет собой параллельное перенесение или тождественное преобразование.

83. Доказать, что произведение параллельного перенесения и симметрии относительно точки O представляет собой симметрию относительно некоторой новой точки O_1.

84. Доказать, что все точки, симметричные с данной относительно всех прямых пучка с центром в точке O, одинаково удалены от этой точки O.

85. Треугольник ABC скольжением по плоскости без выхода из нее был приведен в положение $A_1B_1C_1$, причем A_1B_1 не параллельна AB. Показать, что такое перемещение может быть произведено путем одного вращения вокруг некоторого центра.

86. Доказать: если на окружности, описанной около треугольника, взять произвольную точку и найти три точки, симметричные с ней по отношению к трем сторонам треугольника, то полученные три точки лежат на одной и той же прямой, проходящей через ортоцентр треугольника.

87. Пусть MN и PQ — перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O. Точки A и A' симметричны относительно MN, а точки A'' и A — относительно PQ. Доказать, что A' и A'' симметричны относительно точки O.

88. Доказать, что если в квадрат вписать прямоугольник с неравными сторонами так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника, то диагонали квадрата будут служить осями симметрии прямоугольника.

Центрально-подобные преобразования; подобие фигур

89. Стороны угла пересечены двумя параллельными прямыми. Первая прямая пересекает их в точках A и B, а вторая — в точках A_1 и B_1. Доказать, что точки пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам угла из A и B, и перпендикуляров, восставленных из A_1 и B_1, лежат на одной прямой с вершиной угла.

90. Доказать, что середины сторон треугольника образуют треугольник, центрально-подобный исходному с коэффициентом подобия $-\frac{1}{2}$ и центром подобия в точке пересечения медиан.

91. Доказать, что центры тяжести четырех различных треугольников, вершины которых совпадают с тремя из вершин произвольного четырехугольника, образуют четырехугольник, центрально-подобный исходному с коэффициентом подобия $-\frac{1}{3}$.

92. Пусть окружность S касается двух неравных окружностей S_1 и S_2. Доказать, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через один из центров подобия окружностей S_1 и S_2.

93. Т е о р е м а М е н е л а я. Пусть M, N и P — три точки на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC. Доказать, что точки M, N и P лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} = 1.$$

Отрезки считаются направленными.

94. Доказать, что прямая, соединяющая точки, полученные от пересечения биссектрис двух внутренних углов разностороннего треугольника с противолежащими сторонами, пересекает третью сторону в той же точке, что и биссектриса внешнего угла при противолежащей вершине.

95. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей K. Доказать, что отрезок, отсекаемый от этой прямой боковыми сторонами, делится точкой K пополам.

96. Доказать, что произведение отрезков всякой секущей от центра подобия до двух несходственных точек окружностей есть величина постоянная.

97. Т е о р е м а Ч е в ы. Пусть M, N и P — три точки на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC. Доказать, что прямые CM, AN и BP пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} = -1.$$

Отрезки считаются направленными.

98. Доказать, что прямая, соединяющая основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от этого треугольника подобный ему треугольник.

99. Т е о р е м а П т о л е м е я. Доказать, что во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

100. Т е о р е м а Д е з а р г а. Треугольники ABC и $A'B'C'$ расположены так, что точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой. Доказать, что прямые, соединяющие соответственные вершины, сходятся в одной точке или параллельны.

Задачи на вычисление

101. В треугольнике ABC биссектриса BD внутреннего угла B равна отрезку DC и стороне AB. Определить стороны треугольника ABC, если $AC = b$.

102. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC вне его построен квадрат. Зная, что сумма катетов равна a, определить расстояние от вершины A до центра квадрата.

103. Стороны треугольника равны a, b и c. Построены точки, прямо гомотетичные каждым двум вершинам треугольника, причем за центр гомотетии взята третья вершина и за коэффициент — число 2. Полученные точки последовательно соединены отрезками прямых. Определить стороны полученного шестиугольника.

104. В данный угол вписаны три окружности, последовательно касающиеся друг друга. Определить радиус наименьшей окружности, зная радиусы двух других r и R.

105. По основанию a треугольника определить расстояние между точками, делящими боковые стороны в отношении m, считая от вершины.

106. По основаниям a и b трапеции определить расстояние между точками E и F, делящими боковые стороны в отношении m, считая от основания a.

107. По расстояниям p, q и r вершин треугольника от прямой, не пересекающей его, определить расстояние его центра тяжести от той же прямой.

108. По основаниям a и b трапеции определить длину отрезка, заключенного между боковыми сторонами и проведенного параллельно основаниям через точку пересечения диагоналей.

109. На гипотенузе прямоугольного треугольника со сторонами a, b и c построен внешний квадрат. Точка пересечения его диагоналей соединена прямой с вершиной прямого угла. Найти отношение отрезков гипотенузы, полученных от пересечения с этой прямой.

110. Вычислить углы треугольника, в котором высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на три равные части.

111. Из середины O гипотенузы прямоугольного треугольника восставлен к ней перпендикуляр, пересекающий один из катетов в точке K, а продолжение другого катета в точке M; $OK = a$, $OM = b$. Найти стороны треугольника.

112. Две окружности, радиусы которых R и r, касаются друг друга извне. К окружностям проведена внешняя касательная. Точки касания ее соединены с точкой касания окружностей. Определить стороны образовавшегося треугольника.

113. На катетах a и b прямоугольного треугольника как на диаметрах построены окружности. Определить расстояние между точками пересечения окружностей.

114. Теорема Стюарта. Доказать, что расстояние AP между вершиной A треугольника и произвольной точкой P стороны BC определяется равенством:

$$AP^2 = AB^2 \cdot \frac{PC}{CB} + AC^2 \cdot \frac{BP}{CB} - BC^2 \cdot \frac{PC}{CB} \cdot \frac{PB}{CB}.$$

115. Воспользовавшись теоремой Стюарта, вывести формулу для определения медиан треугольника по трем сторонам a, b и c.

116. Исходя из теоремы Стюарта, вывести формулу для определения длин биссектрис треугольника по трем его сторонам a, b и c.

117. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найти длину биссектрисы прямого угла.

118. Определить стороны треугольника, если его медианы равны m_a, m_b, m_c.

IV. ПЛОЩАДИ ФИГУР

Площади прямолинейных фигур

119. Доказать, что прямоугольник, основание которого равно гипотенузе прямоугольного треугольника, а высота — высоте того же треугольника, равносоставлен с прямоугольником, имеющим основанием и высотой катеты этого треугольника.

120. Через точку, взятую на диагонали l параллелограмма, проведены прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм разделится на четыре параллелограмма, из которых два имеют своими диагоналями части диагонали l. Доказать, что два других параллелограмма равновелики.

121. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника равна площади прямоугольника, построенного на отрезках гипотенузы, на которые она делится точкой касания вписанной окружности.

122. Прямая, проходящая через центр окружности, вписанной в треугольник, делит и периметр и площадь треугольника на части в одном и том же отношении. Доказать.

123. Параллелограмм разбит на четыре части прямыми, соединяющими какую-либо точку, находящуюся внутри, с вершинами. Доказать, что суммы площадей противолежащих частей равны.

124. Через середину каждой диагонали четырехугольника проведена прямая параллельно другой диагонали. Доказать, что прямые, соединяющие точку пересечения этих прямых с серединами сторон четырехугольника, разбивают его на равновеликие части.

125. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его площадь пополам. В каком отношении делит она боковые стороны треугольника?

126. Прямая, параллельная основанию треугольника, площадь которого равна p, отсекает от него треугольник, площадь которого равна q. Определить площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами меньшего треугольника, а четвертая является одной из точек основания большего треугольника.

127. Доказать, что площадь треугольника, у которого основанием служит одна из боковых сторон данной трапеции, а вершиной — середина другой боковой стороны, равна половине площади трапеции.

128. Доказать, что всякий данный прямоугольник равновелик половине такого прямоугольника, стороны которого являются диагоналями квадратов, построенных на двух смежных сторонах данного прямоугольника.

129. Доказать, что из всех треугольников с данными сторонами a и b наибольшую площадь имеет треугольник, в котором эти стороны перпендикулярны.

130. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, квадрат имеет наибольшую площадь.

131. В треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$ так, что точки K и N лежат на стороне BC, а точки L и M лежат соответственно на сторонах AB и AC. Доказать, что если площадь прямоугольника $KLMN$ наибольшая, то сторона LM делит высоту AA' пополам.

132. Доказать, что из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный треугольник.

133. Основания трапеции относятся как $m : n$. Найти, в каком отношении диагонали трапеции делят на четыре части ее площадь.

134. Отрезки, соединяющие произвольную точку внутри треугольника с его вершинами, разбивают его на три других треугольника. При каком положении произвольной точки эти треугольники равновелики?

135. Доказать, что квадрат, построенный на катете прямоугольного треугольника, равносоставлен с прямоугольником, сторонами которого служат гипотенуза и проекция на нее данного катета.

136. Доказать, что квадрат, построенный на высоте прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла, равносоставлен с прямоугольником, сторонами которого служат проекции обоих катетов на гипотенузу.

137. В треугольнике проведены биссектриса и медиана, выходящие из одной вершины. Доказать, что прямая, симметричная с медианой относительно биссектрисы (симедиана), делит противоположную сторону на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон.

138. Из вершин A, B и C треугольника проведены три прямые, проходящие через одну и ту же точку M и пересекающие противоположные стороны соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что $\frac{AM}{MA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C}$. (Отрезки считаются направленными.)

139. Трапеция разбита диагоналями на 4 части. Доказать, что части, прилегающие к боковым сторонам, равновелики.

140. Диагонали делят трапецию на 4 части. Определить площадь трапеции по площадям частей, прилежащих к основаниям.

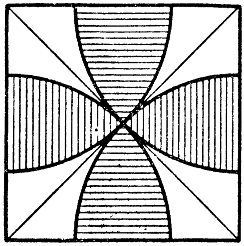
Длина окружности и площадь круга

141. Полуокружность приближенно равна сумме стороны правильного вписанного треугольника и стороны вписанного квадрата. Какова относительная погрешность указанного приближенного значения (с точностью до 0,01%)?

142. На диаметре полукруга радиуса R построен правильный треугольник. Вычислить площадь части его вне полукруга.

143. Полуокружность AMB радиуса r повернута вокруг точки A на $30°$. Найти описанную ею площадь.

144. Сторона квадрата равна a. Из каждой вершины как из центра описаны окружности, проходящие через центр квадрата. Определить площадь фигуры, заштрихованной на чертеже 1.



Черт. 1.

145. Сторона правильного треугольника равна a. Из центра его радиусом $\frac{a}{3}$ описана окружность. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этого круга.

146. Прямоугольный сектор радиуса R разделен на две части дугой того же радиуса с центром в конце дуги сектора. Определить площадь круга, вписанного в меньшую из этих частей.

147. В окружность радиуса R вписаны три равные окружности, касающиеся попарно друг друга. Вычислить площадь криволинейной фигуры, ограниченной этими тремя окружностями.

148. Три окружности радиусов R_1, R_2, R_3 касаются попарно друг друга внешним образом. Через точки касания проведена окружность. Вычислить площадь полученного круга.

V. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Взаимные положения точек, прямых и плоскостей

149. Сколько плоскостей можно провести в пространстве через одну точку, через две точки, через три точки, через четыре точки?

150. Найти наибольшее число прямых, по которым могут пересекаться 3 плоскости, 4 плоскости и т. д.

151. В пространстве даны две пересекающиеся прямые. Всякая ли третья прямая, имеющая с каждой из данных прямых одну общую точку, лежит с ними в одной плоскости?

152. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ будет плоским, если: а) его диагонали пересекаются; б) две его противоположные стороны параллельны; в) две его противоположные стороны при продолжении пересекаются.

153. Доказать, что отрезки, соединяющие середины смежных сторон четырехугольника, образуют параллелограмм (вершины четырехугольника могут и не лежать в одной плоскости).

154. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, пересекаются и делятся в точке пересечения, пополам (вершины четырехугольника не обязательно лежат в одной плоскости).

155. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ расположены так, что

плоскости их не параллельны и прямые, соединяющие соответственные вершины, проходят через одну точку. Доказать, что три точки, в которых пересекаются продолжения соответственных сторон, лежат на одной прямой (теорема Дезарга).

156. Даны две скрещивающиеся прямые. Доказать, что имеется одна и только одна пара параллельных плоскостей, из которых каждая проходит через одну из данных прямых.

157. Если точка вне плоскости треугольника равноудалена от всех его вершин, то она проектируется в центр описанной окружности, а если точка равноудалена от его сторон, то она проектируется в центр вписанной окружности. Доказать.

158. Даны треугольник и плоскость, не совпадающая с плоскостью треугольника. Расстояние центра тяжести треугольника до плоскости равно $\frac{1}{3}$ суммы расстояний вершин треугольника до этой плоскости. Доказать.

159. Доказать, что плоскость, параллельная двум скрещивающимся сторонам четырехугольника, делит другие его две стороны на пропорциональные части.

160. Доказать, что если прямая параллельна плоскости, то кратчайшее расстояние этой прямой от всех прямых плоскости, ей не параллельных, одно и то же.

161. Доказать, что из всех прямых, проведенных на одной грани двугранного угла через данную точку, наибольший угол с другой гранью двугранного угла образует та прямая, которая перпендикулярна к ребру двугранного угла.

162. Показать, что любой выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится параллелограмм.

163. В трехгранном угле $SABC$ два плоских угла ASB и ASC равны. Доказать, что противоположные им двугранные углы равны. Сформулировать и доказать обратное предложение.

164. В трехгранном угле $SABC$ плоский угол ASB больше плоского угла ASC. Доказать, что против угла ASB лежит больший двугранный угол.

165. Доказать, что в трехгранном угле три плоскости, перпендикулярные к его граням и проходящие через биссектрисы его плоских углов, пересекаются по одной прямой.

166. В трехгранном угле все плоские углы прямые. Доказать, что точка пересечения высот треугольника, полученного в сечении этого трехгранного угла произвольной плоскостью, есть проекция вершины трехгранного угла на плоскость сечения.

167. Доказать, что две плоскости α и α', симметричные одна другой относительно третьей плоскости β, или пересекаются по прямой, лежащей на плоскости β, или параллельны между собой.

168. Доказать, что если три какие-либо не лежащие на одной прямой точки одной плоскости симметричны трем точкам другой относительно некоторой третьей плоскости α, то первая и вторая плоскости симметричны относительно плоскости α.

169. Если три не лежащие на одной прямой точки одной плоскости симметричны трем точкам другой плоскости относительно некоторого центра, то плоскости симметричны относительно того же центра.

170. Если три точки одной плоскости, не лежащие на одной прямой, симметричны трем точкам другой относительно какой-либо оси, то и все точки этой плоскости симметричны другой плоскости относительно той же оси.

171. Найти геометрическое место точек, симметричных данной точке A относительно точек данной прямой a.

172. Найти геометрическое место точек, симметричных данной точке A относительно точек, лежащих на данной плоскости α и одинаково удаленных от A.

173. Найти геометрическое место точек, симметричных данной точке A относительно плоскостей, проходящих через данную прямую a.

174. Найти геометрическое место точек, симметричных данной точке A относительно прямых, параллельных данной прямой a.

175. Доказать, что произведение двух параллельных перенесений есть третье параллельное перенесение, вектор которого есть сумма векторов данных перенесений.

176. Если в пространстве даны два равных, непараллельных отрезка, то их можно совместить вращением вокруг некоторой оси. Доказать.

Многогранники

177. Доказать, что куб можно рассечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник.

178. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что плоскости AB_1D_1 и BC_1D перпендикулярны к диагонали A_1C и рассекают ее на три равные части.

179. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K, L, M, N, P и Q являются серединами ребер AB, BB_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1D и DA. Доказать, что эти точки лежат в одной плоскости.

180. Доказать, что правильный тетраэдр можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился квадрат.

181. Доказать, что в правильном тетраэдре сумма расстояний от любой точки, взятой внутри, до всех его четырех граней равна его высоте.

182. Доказать, что правильный октаэдр можно рассечь плоскостью так, что в сечении получится правильный шестиугольник.

183. Доказать, что всякая плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равновеликие части.

184. Доказать, что плоскость, проходящая через высоту правильной пирамиды и высоту боковой грани, перпендикулярна к плоскости боковой грани.

185. Доказать, что если у пирамиды углы наклона боковых ребер к плоскости основания равны, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания.

186. Доказать, что если у пирамиды двугранные углы при основании равны, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание.

187. Каким должен быть параллелограмм, лежащий в основании пирамиды, чтобы плоскости боковых граней могли быть одинаково наклонены к плоскости основания?

188. Каким должен быть параллелограмм, лежащий в основании пирамиды, чтобы боковые ребра могли быть наклонены к плоскости основания под равными углами?

189. Пусть в какой-либо усеченной пирамиде a и b — площади оснований и m — площадь ее среднего сечения. Доказать, что $m = \frac{a + b + \sqrt{ab}}{4}$.

190. Доказать, что из всех прямоугольных параллелепипедов, сумма трех измерений которых равна m, наибольшую поверхность имеет куб.

191. Доказать, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда есть его центр симметрии.

192. Доказать, что плоскость, параллельная двум противоположным ребрам треугольной пирамиды, пересекает ее по параллелограмму.

193. Дана треугольная пирамида $SABC$, вершина S которой проектируется в центр окружности, вписанной в основание ABC. Доказать, что биссекторная плоскость двугранного угла, проходящая через ребро SA, делит каждую из граней SBC и ABC на части, площади которых относятся как площади граней, образующих двугранный угол.

194. Параллелепипед пересечен плоскостью, проходящей через вторые концы ребер, выходящих из одной вершины. Доказать, что диагональ параллелепипеда, проходящая через ту же вершину, пересекает полученный в сечении треугольник в центре тяжести.

195. Доказать, что если в правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен $\frac{\pi}{3}$, то боковые ребра, проходящие через противоположные вершины основания, взаимно перпендикулярны.

Задачи на вычисление, связанные с многогранниками

196. Ребро правильного октаэдра равно a. Центры граней октаэдра служат вершинами другого правильного многогранника. Установить вид многогранника и вычислить длины его ребер.

197. Центры граней куба служат вершинами октаэдра. Вычислить его поверхность, если поверхность куба равна m^2.

198. Центры граней куба служат вершинами октаэдра. Найти отношение объемов куба и октаэдра.

199. Высота правильного тетраэдра равна a. Найти ребро.

200. Каждое ребро правильного тетраэдра равно a. Найти расстояние между центрами его граней.

201. Найти угол между противоположными ребрами правильного тетраэдра.

202. Определить площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вторые концы трех его ребер, выходящих из одной вершины, если ребро куба равно a.

203. Вычислить объем треугольной пирамиды, боковые ребра которой взаимно перпендикулярны и равны соответственно a, b и c.

204. Плоскостями, проходящими через середины трех ребер, выходящих из каждой вершины куба, отсечены от него четыре пирамиды. Вычислить объем оставшегося тела.

205. Определить высоту правильной усеченной четырехугольной пирамиды, если ребра ее оснований равны a и b, а боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

206. Ребро куба равно a. Найти площадь сечения, проведенного через центр куба параллельно двум каким-либо диагоналям двух смежных граней куба.

207. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен α. Определить двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями.

208. В правильной n-угольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Под каким углом к плоскости основания наклонены боковые ребра?

209. Дана треугольная пирамида $SABC$. На ее боковых ребрах отложены отрезки $SA' = SB' = SC' = 1$. Пусть объем пирамиды $SA'B'C' = V_0$. Выразить объем $SABC$ через V_0, зная длины боковых ребер SA, SB, SC.

210. Высота пирамиды равна h. Найти расстояние от вершины пирамиды до плоскости сечения, параллельного основанию и делящего боковую поверхность пирамиды пополам.

211. Площади нижнего и верхнего оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны a^2 и b^2. Найти площадь сечения, параллельного основаниям и делящего объем усеченной пирамиды пополам.

212. Площадь основания прямой треугольной призмы равна l^2. Площади боковых граней m^2, n^2 и p^2. Найти объем призмы.

213. Высота пирамиды разделена на три равные части. Найти, в каком отношении делится объем пирамиды плоскостями, параллельными плоскости основания и проходящими через точки деления.

214. Плоскость, параллельная плоскости основания, делит боковую поверхность пирамиды пополам. В каком отношении делится объем?

215. Ребро куба a. Вычислить площадь сечения куба плоскостью, проходящей через одну из вершин A верхнего основания и через середины двух ребер нижнего основания, исходящих из вершины, противоположной вершине A.

216. Площадь сечения правильной треугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания, равна S. Вычислить площадь сечения, параллельного данному и проходящего через центр нижнего основания.

217. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно к плоскости ее основания. Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через A, параллельной BC и перпендикулярной к грани SBC, если $SA = 1$, $AB = \frac{13}{16}$, $AC = \frac{15}{16}$, $BC = \frac{7}{8}$.

218. Площадь боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна S. Вычислить площадь сечения, параллельного этой грани и делящего сторону основания в отношении $3:1$.

219. Площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания и через высоту пирамиды, равна S. Вычислить площадь сечения, параллельного данному и делящего пополам сторону основания.

220. Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна S. Вычислить площадь сечения, параллельного этой грани и проходящего через центр основания.

221. Площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды, проходящего через ее высоту и перпендикулярного к стороне основания, равна S. Вычислить площадь сечения, параллельного данному и делящего сторону основания в отношении $3:1$.

222. Ребро правильного тетраэдра равно a. Найти стороны, периметр и площадь сечения, параллельного двум непересекающимся ребрам тетраэдра и отстоящего от его центра на расстоянии $p \left(0 \leqslant p \leqslant \frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$.

223. В треугольной пирамиде боковые ребра равны a, b, c, а все плоские углы при вершине прямые. Найти сторону куба, вписанного в пирамиду так, что одна из его вершин совпадает с вершиной пирамиды, а противоположная вершина лежит на основании.

Тела вращения

224. Доказать, что касательная к окружности основания конуса перпендикулярна к образующей, проходящей через точку прикосновения.

225. Ребро куба равно a. Найти радиус цилиндрической поверхности, осью которой служит диагональ куба, если известно, что эта цилиндрическая поверхность касается ребер куба.

226. Рассмотреть вопрос о центре подобия двух сфер. Установить, в каких случаях две сферы имеют два центра подобия, один или ни одного.

227. Доказать, что плоскость, касающаяся двух данных сфер, проходит через их центр подобия или параллельна линии центров.

228. Параллелограмм, имеющий стороны a и b и острый угол α, вращается около перпендикуляра к большей диагонали, проведенного через ее конец (в плоскости параллелограмма). Определить объем тела вращения.

229. Показать, что объемы конусов, полученных при вращении треугольника последовательно вокруг его сторон, обратно пропорциональны этим сторонам.

230. Определить плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если центры вписанного и описанного шаров совпадают.

231. Основание прямой призмы — четырехугольник, в котором сумма противоположных углов равна двум прямым углам. Доказать, что около этой призмы можно описать сферу.

232. Доказать, что около всякого прямоугольного параллелепипеда можно описать сферу.

233. Найти радиус сферы, описанной около треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 13, 14, 15, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углами в 15°.

234. В цилиндре высота равна диаметру окружности основания. Некоторая точка окружности верхнего основания соединена с точкой нижней окружности так, что соединяющая прямая образует с плоскостью основания угол α. Определить кратчайшее расстояние между этой прямой и осью цилиндра.

235. Высота конуса равна h. Две взаимно перпендикулярные образующие делят боковую поверхность на две части в отношении $1:2$. Найти объем конуса.

236. Конус катится без скольжения на плоскости, вращаясь вокруг своей вершины; высота его при этом образует боковую поверхность конуса, подобного данному конусу. Найти отношение этой поверхности к боковой поверхности данного конуса.

237. На поверхности шара даны четыре равные окружности, каждая из которых касается трех остальных. Найти их радиусы, если радиус шара R.

238. Конус описан около двух внешне касающихся сфер с радиусами R и r. Найти объем тела, ограниченного этими тремя поверхностями.

239. В шаре радиуса R сделано цилиндрическое отверстие, ось которого проходит через центр шара, а диаметр отверстия равен радиусу шара. Определить объем оставшейся части шара.

240. Высота конуса разделена на три равные части; точки деления служат вершинами двух конических поверхностей, образующие которых параллельны образующим первого конуса и одинаково с ними направлены. В каком отношении разделился объем конуса?

241. Три равносторонних конуса, радиус основания каждого из которых равен r, расположены так, что все они имеют общую вершину и каждые два из них — по одной общей образующей. Найти объем пирамиды, вершинами которой служат общая вершина и центры оснований конусов.

242. В правильный тетраэдр вписана сфера. В сферу вписан новый правильный тетраэдр. Найти отношение объемов этих тетраэдров.

243. В сферу вписан правильный тетраэдр, затем в тетраэдр снова вписана сфера. Найти отношение поверхностей этих сфер.

ЧАСТЬ II

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

VI. ОБЩИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ. СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

В дальнейшем приняты следующие обозначения:

1. Углы треугольника ABC обозначаются через A, B, C, противолежащие стороны — соответственно через a, b, c. Высота, медиана и биссектриса, проведенные из вершины A, обозначаются соответственно через h_a, m_a, b_a. Радиусы вписанной и описанной около треугольника окружностей обозначаются через r и R.

2. Окружность с центром O и радиусом r обозначается через O (r).

244. Свести к системе постулатов построений с помощью циркуля и линейки решение следующих задач:

а) Разделить угол пополам.

б) Из данной точки опустить перпендикуляр на данную прямую.

245. Решить с помощью двусторонней линейки следующие задачи:

а) Разделить данный отрезок пополам.

б) Разделить данный угол пополам.

в) Удвоить данный отрезок.

г) Удвоить данный угол.

д) Восставить перпендикуляр к данной прямой в данной на ней точке. (Указать при решении задач операции, вытекающие из свойств двусторонней линейки.)

246. Решить задачи на построение с помощью «прямого угла»:

а) Отрезок AB разделить пополам.

б) Данный отрезок удвоить.

в) Разделить данный угол пополам.

г) Построить центр окружности, описанной около данного треугольника.

д) Построить центр данной окружности. (Указать при решении задач операции, вытекающие из свойств «прямого угла».)

247. Дана прямая a и точка A вне ее. Через данную точку A провести прямую, параллельную данной прямой, пользуясь только двусторонней линейкой.

248. На данной прямой a отложить от данной точки D отрезок, равный данному отрезку AB, пользуясь только двусторонней линейкой.

249. В той же задаче сделать построение, пользуясь только «прямым углом».

250. Дан острый угол. Удвоить его с помощью «двусторонней линейки».

251. Построить треугольник по периметру и двум углам.

252. Построить треугольник по углу, биссектрисе и высоте, проходящим через вершину данного угла*.

253. Построить равносторонний треугольник так, чтобы одна его вершина совпадала с точкой E, а другие две лежали на сторонах данного прямого угла ABC.

254. Даны окружность $O(r)$ и точка A вне круга. Через A провести секущую так, чтобы она окружностью разделилась пополам.

255. Даны три точки; провести через них параллельные прямые a, b и c так, чтобы расстояния между ними были равны.

256. Равными радиусами из центров A и B описать две окружности так, чтобы общая к ним касательная проходила через данную точку.

257. Построить параллелограмм, если даны середины трех его сторон.

258. Построить треугольник, зная середины его сторон.

259. Провести прямую, находящуюся на равных расстояниях от трех данных точек.

260. Даны две точки и окружность. Провести через данные точки две параллельные прямые так, чтобы окружность отсекала на них две равные хорды.

261. Построить треугольник ABC, зная высоту BD и радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD.

262. Построить параллелограмм так, чтобы две противоположные вершины были в данных точках, а две другие на данной окружности O.

263. Дан прямоугольный треугольник. Через вершину прямого угла провести окружность, касательную к гипотенузе так, чтобы центр лежал на одном из катетов.

264. Построить ромб, зная его диагональ и радиус вписанной окружности.

265. Через точку A пересечения двух окружностей провести секущую BAC так, чтобы $BA = AC$. (Точки B и C лежат соответственно на окружностях.)

266. На стороне угла с вершиной A дана точка X. Построить на другой стороне точку Y так, чтобы $\angle AXY = 3\angle AYX$.

---

* Задачи на построение № 252—444 следует решать циркулем и линейкой.

267. Построить квадрат $ABCD$ так, чтобы точки A и B были на данной окружности, а C и D — на данной прямой.

268. В треугольнике ABC провести $DE \parallel BC$ так, чтобы $BD + EC = l$, где l — данный отрезок и точки D и E лежат на сторонах треугольника.

269. В треугольнике ABC провести $DE \parallel BC$ так, чтобы $AD = EC$. Точки D и E лежат соответственно на сторонах AB и AC треугольника.

270. Даны окружность и три точки на ней B, M и H. Вписать в данную окружность треугольник так, чтобы биссектриса, медиана и высота, проведенные из одной вершины, проходили соответственно через точки B, M и H.

271. Провести прямую, отрезок которой между данными параллельными прямыми был бы данной длины, и притом так, чтобы отношение расстояний от данных точек A и B до этой прямой было равно $p : q$ (p и q — данные отрезки).

272. Построить треугольник ABC по углам A и B и разности сторон AC и BC.

273. Построить параллелограмм по стороне и двум высотам.

274. Через данную точку провести окружность, касательную к двум данным параллельным прямым.

275. Через точку A провести прямую так, чтобы отрезки ее между сторонами угла BCD и точкой A находились в данном отношении.

276. Даны две точки A и B, лежащие соответственно на параллельных прямых l_1 и l_2, и точка C вне их. Через точку C провести прямую, встречающую данные прямые l_1 и l_2, соответственно в точках D и E так, чтобы $AD : BE = m : n$.

277. Построить треугольник по углу и расстояниям центра вписанной окружности от двух других вершин этого треугольника.

278. Построить окружность, касающуюся данной окружности и прямой a в данной на ней точке A.

279. Построить окружность, касающуюся данной окружности в данной на ней точке и данной прямой.

280. Провести окружность, касающуюся двух данных окружностей, одной из них — в данной точке.

281. В данную окружность вписать треугольник, если даны точки пересечения его биссектрис с окружностью.

282. В данную окружность вписать треугольник, если даны точки пересечения его высот с окружностью.

VII. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ

283. Построить геометрическое место середин всех хорд, отсекаемых данной окружностью на прямых, проходящих через данную точку.

284. Построить треугольник по основанию a, углу при вершине A и точке D пересечения основания с биссектрисой внутреннего угла при вершине A.

285. Через точку, не лежащую на данной окружности, провести секущую, на которой окружность отсекала бы хорду данной длины.

286. Через точку P, лежащую внутри данного круга, провести хорду, которая при пересечении с данной хордой делится пополам.

287. Через данную точку A провести данным радиусом окружность так, чтобы она из другой данной точки B была видна под данным углом α.

288. Даны две окружности и общая их внешняя касательная. Найти на этой касательной точку X такую, чтобы сумма углов, под которыми видны данные окружности из этой точки, была бы равна данному углу α.

289. Даны точки A, B, прямая l и окружность $O(r)$. Через точки A и B провести окружность, которая в пересечении с окружностью $O(r)$ дала бы хорду, параллельную прямой l.

290. Даны окружность и на ней две точки M и N. Найти на окружности такую точку X, чтобы $MX - NX = a$, где a — данный отрезок.

291. Построить параллелограмм, зная основание, высоту и угол между диагоналями.

292. Построить треугольник по основанию, противолежащему углу и высоте на какую-либо боковую сторону.

293. Построить треугольник, зная a, A и m_a*.

294. Построить треугольник по периметру $2p$, углу A и высоте h_a, выходящей из вершины угла A.

295. Построить треугольник по углам при вершинах B и C и медиане m_b.

296. Построить треугольник, зная угол A, h_b и m_a.

297. Построить треугольник по основанию a, углу при вершине A и медиане m_b.

298. Построить $\triangle ABC$, зная угол A, основание a и радиус r вписанной окружности.

299. Построить треугольник по данным радиусам вписанной и описанной окружностей и одному из углов треугольника.

300. Даны два отрезка MN и PQ. На данной прямой a найти такую точку X, чтобы треугольники MXN и PXQ были равновелики.

301. В данную окружность вписать прямоугольник так, чтобы две его стороны проходили через две данные точки.

302. В данную окружность вписать прямоугольный треугольник, зная острый угол и точку, через которую проходит один из катетов.

---

* Здесь данную в задаче краткую формулировку следует понимать так: даны два отрезка p и q и угол α Построить треугольник ABC, у которого угол A равен α, сторона a равна p, медиана m_a равна q.

В дальнейшем в ряде задач применяются аналогичные сокращения формулировок.

303. В данную окружность вписать треугольник с данным углом так, чтобы две его стороны проходили через две данные точки.

304. Провести окружность с центром в данной точке, пересекающую окружность $O(r)$ под данным углом.

305. Дана точка внутри круга. Провести через нее хорду так, чтобы разность ее отрезков, определяемых данной точкой, была данная.

306. Даны две точки A и B и окружность $O(r)$.

Провести через A и B две секущие, хорды которых внутри данной окружности были бы равны и пересекались под данным углом.

307. Построить квадрат, стороны которого соответственно проходят через четыре данные точки.

308. Построить параллелограмм, две смежные вершины которого были бы в данных точках, а две другие — на данной окружности.

309. Провести к данной окружности касательную так, чтобы отрезок ее между двумя данными концентрическими окружностями имел данную длину.

310. Через две точки, данные на окружности, провести две параллельные хорды так, чтобы сумма их равнялась данному отрезку.

311. Провести окружность, пересекающую три данные равные окружности $O_1(r)$, $O_2(r)$, $O_3(r)$ по хордам данной одинаковой длины.

312. Даны окружности $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$, отрезки a и b и углы α и β. Построить точку, секущие из которой к окружностям $O_1(r_1)$ и $O_2(r_2)$ были бы равны соответственно отрезкам a и b и отсекали бы на окружностях дуги, вмещающие углы α и β.

313. В окружности $O(r)$ провести хорду данной длины так, чтобы она прямой l разделилась в данном отношении (в частности, пополам).

314. Даны две точки A и B и две параллельные прямые. Через точку A провести секущую так, чтобы отрезок ее между параллельными прямыми делился основанием перпендикуляра, опущенного из точки B на искомую прямую, в данном отношении.

315. Построить параллелограмм с данной диагональю, равновеликий данному четырехугольнику.

316. Построить параллелограмм, равновеликий данному четырехугольнику $ABCD$, так, чтобы основание параллелограмма равнялось AD.

317. Построить прямоугольник, имеющий данную диагональ, равновеликий данному треугольнику.

318. Построить треугольник, зная a, h_a и $b^2 + c^2$*.

319. Построить треугольник, зная a, h_a и $b^2 - c^2$.

320. Построить треугольник, зная a, A и $b^2 + c^2$.

321. Построить треугольник, зная a, m_a и $b^2 - c^2$.

322. Построить треугольник, зная a, A и $b^2 - c^2$.

---

* См. сноску на стр. 28.

323. Построить треугольник по данным a, A и отношению двух других сторон $b : c$.

324. Построить треугольник, зная a, h_a и отношение двух других сторон $b : c$.

325. Построить треугольник по основанию a, медиане m_a и отношению двух других сторон $b : c$.

326. На прямой даны три точки A, B и C. Определить на данной окружности точку X так, чтобы $\angle AXC = 2 \angle AXB$.

327. Найти точку, если известно, что касательные, проведенные из нее к двум данным окружностям, равны между собой и что одна из окружностей видна из этой точки под данным углом.

328. Построить треугольник ABC, если известна биссектриса BD и отрезки AD и DC, на которые она делит противоположную сторону.

329. Через две данные точки провести окружность, делящуюся пополам данной окружностью.

330. Построить окружность, ортогональную к трем данным окружностям.

331. Построить треугольник по основанию и точкам пересечения основания с биссектрисой и высотой.

332. Построить треугольник по основанию a, высоте h_a, опущенной на основание, и точке пересечения основания с биссектрисой угла при вершине.

333. Построить треугольник, если даны R, A, $b^2 - c^2$.

334. Построить треугольник, если даны R, A и $b^2 + c^2$.

335. Построить треугольник, зная основание a, высоту h_a и отношение двух других высот $h_b : h_c$.

336. Даны точки A, B и C. Провести через A окружность так, чтобы точки B и C были серединами хорд этой окружности, причем каждая хорда была бы определенной длины.

VIII. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Параллельное перенесение. Вращение. Симметрия

337. Построить трапецию по четырем сторонам.

338. Построить трапецию по разности оснований, двум боковым сторонам и одной диагонали.

339. Построить трапецию по диагоналям и двум параллельным сторонам.

340. Построить треугольник, если даны три его медианы.

341. Построить трепецию, зная основание, угол между диагоналями, расстояние между параллельными сторонами и среднюю линию.

342. Построить четырехугольник, зная три стороны и углы, прилежащие к четвертой стороне.

343. Построить четырехугольник по сторонам и углу между двумя противоположными сторонами.

344. Построить четырехугольник по диагоналям, углу между ними и двум каким-нибудь сторонам.

345. Построить четырехугольник, зная его диагонали, две противоположные стороны и угол между этими сторонами.

346. Построить отрезок, равный и параллельный данному, так, чтобы один его конец лежал на данной прямой, а другой — на данной окружности.

347. Построить отрезок, равный и параллельный данному, концы которого лежали бы на двух данных окружностях.

348. Построить четырехугольник, зная три его угла и две противоположные стороны.

349. Через данную точку провести прямую так, чтобы сумма (или разность) расстояний ее от двух других данных точек была равна данной длине.

350. Даны две точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой xy. Расположить на этой прямой отрезок MN данной длины так, чтобы ломаная $AMNB$ была наименьшей длины.

351. Даны две параллельные прямые l_1 и l_2 и две точки A и B, лежащие вне полосы, ограниченной этими прямыми, по разные стороны от нее. На прямых l_1 и l_2 найти соответственно точки C и D так, чтобы отрезок CD имел данное направление и чтобы ломаная $ACDB$ была наименьшей длины.

352. Даны хорды AB и CD окружности $S(r)$. Найти на окружности такую точку X, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF, имеющий данную длину a.

353. Через данную точку A провести прямую так, чтобы ее точки пересечения с двумя данными окружностями определяли хорды равной длины.

354. Построить равносторонний треугольник так, чтобы одна его вершина находилась в данной точке, а две другие были расположены на двух данных прямых.

355. Построить равносторонний треугольник так, чтобы одна вершина лежала на данной окружности, другая — на данной прямой, а третья — в данной точке.

356. Даны две окружности и прямая l. Построить равносторонний треугольник так, чтобы две его вершины находились соответственно на окружностях, а высота, проведенная через третью вершину, лежала на прямой l.

357. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник так, чтобы вершины острых углов лежали на двух данных окружностях, а вершина прямого угла совпадала с данной точкой.

358. Даны две прямые a и b и точка O. С центром в точке O построить окружность так, чтобы одна из дуг ее, заключенная между прямыми a и b, была видна из точки O под данным углом α.

359. Даны две окружности и точка S. Построить окружность с центром в точке S так, чтобы одна из ее дуг, заключенная между точками пересечения с данными окружностями, имела бы данную градусную меру φ.

360. Построить квадрат, если даны его центр и две точки, лежащие на его параллельных сторонах.

361. Даны окружность, прямая и точка A. Построить на прямой и окружности соответственно по точке M и N так, чтобы точка A была серединой отрезка MN.

362. Через точку пересечения двух окружностей провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный внутри окружностей, делился этой точкой пополам.

363. Построить равносторонний треугольник, вершины которого лежат на трех параллельных прямых, а центр — на четвертой прямой, не параллельной предыдущим.

364. Дан квадрат $ABCD$ и на стороне AB точка E. На сторонах BC и CD построить соответственно точки F и G так, чтобы треугольник EFG был равносторонним.

365. Найти точку, касательные из которой к двум данным окружностям образуют данный угол, причем отрезок одной из касательных, заключенный между искомой точкой и точкой касания, имеет данную длину.

366. Даны хорды AB и CD окружности $O(r)$ и точка I на хорде CD. Найти на окружности такую точку X, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF, делящийся в точке I пополам.

367. Даны отрезок a, угол α, две концентрические окружности $O(r_1)$ и $O(r_2)$ и точка B, отличная от точки O. На данных окружностях построить по одной точке X и Y так, чтобы $XY=a$ и $\angle XBY = \alpha$.

368. Даны две концентрические окружности с центром в точке O. Провести луч, исходящий из точки O, так, чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения этого луча с окружностями, был виден из данной точки под данным углом.

369. На данной прямой построить точку:

а) сумма расстояний которой от двух данных точек наименьшая;

б) разность расстояний которой от двух данных точек наибольшая.

370. Прямая l пересекает отрезок AB. Найти на этой прямой такую точку X, чтобы прямая l служила биссектрисой угла AXB.

371. Построить треугольник наименьшего периметра, если даны основание и высота.

372. Даны две пересекающиеся прямые a и b и две точки A и B, не лежащие на этих прямых. На прямых a и b построить соответственно точки M и N так, чтобы ломаная $AMNB$ имела наименьшую длину.

373. Даны прямая MN и точки A и B по одну сторону от нее. На MN найти точку X так, чтобы $\angle MXA = \angle AXB$.

374. Даны прямая AB и точки M и N, не лежащие на ней. На прямой AB построить точку X так, чтобы $\angle AXN = 2\angle MXB$.

375. Даны точки A и B и угол α. На прямой CD найти точку X так, чтобы $\angle AXC - \angle BXD = \alpha$.

376. Построить равнобедренный треугольник, основание которого лежало бы на одной стороне данного угла, вершина — на другой стороне угла, а боковые стороны проходили бы через две данные внутри угла точки.

377. На прямой l построить точку X так, чтобы касательные, проведенные из нее к двум данным окружностям $O(r)$ и $O_1(r_1)$, составляли с прямой l равные углы.

378. Построить ромб с данной диагональю, лежащей на данной прямой так, чтобы две другие вершины ромба находились на двух окружностях.

379. Построить треугольник, зная b, c и $\angle B - \angle C$.

Метод подобия

380. В данный сектор вписать квадрат.

381. Построить ромб по стороне и отношению диагоналей.

382. Построить прямоугольник по стороне и отношению другой стороны к диагонали.

383. Построить параллелограмм по стороне, отношению диагоналей и углу между ними.

384. Построить трапецию по данным двум смежным сторонам, углу между ними и отношению двух других сторон.

385. В данный треугольник вписать ромб с острым углом так, чтобы две его вершины лежали на основании, а две другие — соответственно на боковых сторонах.

386. В данный треугольник вписать прямоугольник, подобный данному.

387. Построить треугольник по двум углам и сумме высоты с основанием.

388. Построить треугольник по углу при основании, отношению боковых сторон и разности основания и высоты.

389. Построить треугольник по двум углам и радиусу вписанной окружности.

390. Вписать в данную окружность треугольник, подобный данному.

391. Построить треугольник по двум углам и сумме высоты, медианы и биссектрисы, исходящих из третьей вершины.

392. Даны четыре отрезка m, n, p и q. Построить треугольник, стороны которого пропорциональны отрезкам m, n и p, а сумма медианы, высоты и биссектрисы, исходящих из одной вершины, равна q.

393. Построить треугольник по данному углу B, высоте h_b и по отношению отрезков, на которые основание делится высотой.

394. Через точку вне окружности провести секущую, внешняя часть которой была бы вдвое более внутренней.

395. Даны две прямые a, b и точка M. Найти на прямой b точку X, равноотстоящую от прямой a и от точки M.

396. Даны две прямые a и b и точка S, не лежащая на этих прямых. Провести через точку S прямую SMN так, чтобы $SM : SN = n : m$, где M и N — точки пересечения этой прямой с данными прямыми, а m и n — данные отрезки.

397. Через точки A и B провести окружность, пересекающую данные параллельные прямые соответственно в точках X и Y так, чтобы $XY = AB$.

398. Через вершину A треугольника ABC провести прямую так, чтобы отношение перпендикуляров, опущенных на нее из вершин B и C, было равно $p : q$, где p и q — данные отрезки.

399. Даны точка A и три прямые, пересекающиеся в точке B. Через точку A провести прямую, отрезки которой между данными прямыми находились бы в данном отношении.

400. Даны три концентрические окружности. Провести секущую ABC так, чтобы $AB = BC$ (где A, B и C — три последовательные точки пересечения прямой с каждой из данных окружностей).

401. Построить треугольник по радиусу описанной окружности, одному из углов и углу, заключенному между медианой и высотой, выходящими из вершины данного угла треугольника.

402. Даны две прямые и окружность. Построить окружность, касающуюся данных прямых и данной окружности.

403. На сторонах AB и BC треугольника ABC построить соответственно точки D и E так, чтобы $AD = DE = EC$.

404. Построить треугольник, зная $a + b$, $b + c$ и $\angle B$.

405. Даны две окружности и на них по одной точке. Провести две равные окружности, касающиеся в данных точках данных окружностей и между собой.

406. Построить окружность, проходящую через данную точку и касательную к данной прямой и к данной окружности.

407. Построить окружность, касательную к данной прямой и к двум данным окружностям.

408. Построить окружность, проходящую через данную точку и касательную к двум данным окружностям.

409. Построить окружность, касательную к трем данным окружностям. (Задача Аполлония.)

Метод инверсии

410. Дан квадрат, одна вершина которого совпадает с центром инверсии, а противоположная вершина лежит на окружности инверсии. Построить фигуру, ему инверсную.

411. Дан квадрат, две вершины которого лежат на окружности инверсии, а третья — в центре инверсии. Построить фигуру, ему инверсную.

412. В окружность вписан треугольник. Приняв эту окружность за окружность инверсии, построить фигуру, инверсную вписанному треугольнику.

413. Даны две окружности, касающиеся друг друга в точке T. Приняв точку T за полюс инверсии, построить фигуру, инверсную двум окружностям.

414. Даны три окружности, имеющие общую точку T. Построить окружность, касающуюся трех данных.

415. Через две данные точки A и B провести окружность, ортогональную данной окружности.

416. Через данную точку провести окружность, ортогональную двум данным окружностям.

417. Даны отрезок m, две прямые a и b и точка K. Провести секущую KAB так, чтобы произведение $KA \cdot KB$ равнялось бы m^2, где точки A и B лежат соответственно на прямых a и b.

418. Даны отрезок m, две окружности и точка K. Провести секущую KAB так, чтобы произведение $KA \cdot KB$ равнялось бы m^2, где A и B — точки, лежащие соответственно на данных окружностях.

419. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касательную к данной прямой.

420. Построить окружность, проходящую через две данные точки A и B и касательную к данной окружности.

421. Построить окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.

422. Построить окружность, касающуюся двух данных окружностей, причем одной из них в данной точке.

423. Построить окружность, проходящую через две данные точки и пересекающую данную окружность под данным углом.

424. Построить окружность, проходящую через две данные точки и пересекающую данную прямую под данным углом.

425. Решить задачу **408** методом инверсии.

426. Построить окружность, проходящую через данную точку и пересекающую две данные окружности под данными углами.

427. Решить задачу Аполлония методом инверсии (см. № **409**).

IX. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

428. Построить абсолютные величины корней квадратных уравнений (a и b — данные отрезки):

а) $x^2 - x\sqrt{ab} + a^2 = 0$; б) $ax^2 - \sqrt{ab^3}\,x - b\sqrt{a^4 - b^4} = 0$.

429. Данный отрезок разделить в крайнем и среднем отношениях.

430. В данную окружность вписать правильный десятиугольник.

431. Через данную точку провести секущую к окружности так, чтобы ее внутренняя часть равнялась отрезку m, равному $\sqrt{\dfrac{a\sqrt{a^4 - b^4}}{b}}$, где a и b —данные отрезки.

432. Построить круг, площадь которого равна площади кольца между двумя данными концентрическими окружностями.

433. Построить окружность, проходящую через две точки и касающуюся данной прямой.

434. Провести прямую, параллельную диагонали и пересекающую две смежные стороны данного прямоугольника так, чтобы площадь его разделилась в отношении 1 : 3.

435. Провести прямую, параллельную основанию и пересекающую боковые стороны данного треугольника так, чтобы его площадь разделилась в данном отношении.

436. Провести прямую, параллельную основаниям данной трапеции так, чтобы ее площадь разделилась пополам.

437. Провести прямые, параллельные основанию и пересекающие боковые стороны данного треугольника так, чтобы его площадь разделилась на пять равных частей.

438. Провести прямые, параллельные основаниям трапеции и пересекающие ее боковые стороны так, чтобы ее площадь разделилась на три равные части.

439. Через данную точку A, лежащую вне окружности, провести прямую так, чтобы отношение $AM : MN$ было равно отношению данных отрезков; M и N — точки пересечения прямой с окружностью; точка M лежит между A и N.

440. Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику.

441. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник, равновеликий данному прямоугольнику.

442. Построить квадрат, площадь которого была бы равна сумме площадей двух данных прямоугольников.

443. В данную окружность вписать прямоугольник, равновеликий данному квадрату.

444. В данную окружность вписать прямоугольник данного периметра.

445. Доказать, что корни уравнения $x^3 - 5x + 1 = 0$ не могут быть построены циркулем и линейкой (при данной единице длины).

446. Доказать, что корни уравнения $2x^3 - 7x^2 + 3x + 5 = 0$ могут быть построены циркулем и линейкой при данной единице длины.

447. Доказать, что квадрат, равновеликий данному кругу, нельзя построить циркулем и линейкой.

448. Доказать, что циркулем и линейкой нельзя построить куб, в два раза больший по объему данного куба (задача об удвоении куба).

449. Доказать, что циркулем и линейкой нельзя произвольный данный угол разделить на три равные части (задача о трисекции угла).

450. Доказать, что циркулем и линейкой нельзя построить треугольник по трем данным его биссектрисам.

451. Доказать, что циркулем и линейкой нельзя построить на окружности точку, отношение расстояний которой до данной точки и до данной прямой было бы данным.

452. Доказать, что циркулем и линейкой нельзя вписать в данную окружность равнобедренный треугольник, зная его высоту, опущенную на одну из равных сторон.

X. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ, РЕШАЕМЫЕ ОГРАНИЧЕННЫМИ СРЕДСТВАМИ

Геометрические построения одним циркулем

453. Даны две точки A и B. Построить точку, лежащую на прямой AB.

454. Построить середину дуги AB данной окружности.

455. Увеличить данный отрезок в n раз (где n — натуральное число).

456. Построить $\frac{1}{n}$ часть данного отрезка (n — натуральное число).

457. Построить точки пересечения данной окружности с прямой, заданной двумя точками A и B.

458. Построить точку пересечения двух прямых AB и CD.

459. Построить угол, равный данному углу.

460. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.

461. Через точку, данную на окружности, провести к ней касательную.

462. Через данную точку внутри круга провести хорду, делящуюся в данной точке пополам.

463. Из данной точки A восставить перпендикуляр к прямой, заданной двумя своими точками A и B.

464. Из точки A, данной вне окружности, провести секущую так, чтобы ее внешняя часть равнялась внутренней.

465. Построить точку D, симметричную точке C относительно прямой, заданной двумя точками A и B.

Геометрические построения одной линейкой

См. задачи 778—783; 789—796; 805; 807—810; 820—823.

XI. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА И ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Основные построения. Задачи на сечения

466. Провести плоскость через прямую и не лежащую на ней точку, через две пересекающиеся прямые, через две параллельные прямые.

467. Через данную точку, не лежащую на данной прямой, провести прямую, параллельную данной прямой.

468. Даны две скрещивающиеся прямые. Провести через каждую из них по плоскости так, чтобы они были параллельны между собой (см. задачу 156).

469. Через точку, не лежащую в данной плоскости, провести плоскость, параллельную данной.

470. Через данную точку в пространстве провести плоскость, перпендикулярную к данной прямой.

471. Через данную точку в пространстве провести прямую, перпендикулярную к данной плоскости.

472. Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости.

473. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную к двум данным скрещивающимся прямым.

474. Построить линию пересечения данной сферической поверхности с данной плоскостью*.

475. Построить точки пересечения данной сферической поверхности с данной прямой.

476. Построить линию пересечения данной конической поверхности с данной плоскостью, перпендикулярной к оси конической поверхности.

477. Построить линию пересечения данной конической поверхности с данной плоскостью, проходящей через вершину этой поверхности.

478. Построить точки пересечения данной прямой с данной конической поверхностью.

479. Построить линию пересечения данной цилиндрической поверхности с данной плоскостью, перпендикулярной (параллельной) оси данной поверхности.

480. Построить точки пересечения данной цилиндрической поверхности с данной прямой.

481. Через данную прямую провести плоскость, касательную к данной сферической поверхности.

482. Через данную точку провести плоскость, касательную к данной конической (цилиндрической) поверхности.

Задачи на отыскание геометрических мест точек и прямых

483. Определить геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек.

484. Определить геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна.

---

* Здесь и в дальнейшем мы будем считать:

а) сферическую поверхность заданной, если дан центр поверхности и радиус в виде отрезка;

б) коническую поверхность заданной, если дана ось поверхности, вершина и угол между осью и образующими;

в) цилиндрическую поверхность заданной, если дана ось поверхности и радиус направляющей в виде отрезка.

В соответствии с этим под построением той или иной поверхности мы будем понимать построение элементов, определяющих поверхность.

485. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных точек, не лежащих на одной прямой.

486. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от четырех вершин прямоугольника (равнобедренной трапеции).

487. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных параллельных прямых.

488. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

489. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от сторон данного ромба.

490. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от трех прямых, проходящих через одну точку и не лежащих в одной плоскости.

491. Найти геометрическое место проекций данной точки на прямые, лежащие в данной плоскости и проходящие через данную точку.

492. Даны плоскость α и две точки A и B. Найти геометрическое место таких точек M плоскости α, чтобы MA и MB образовали с этой плоскостью равные углы.

493. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от трех плоскостей, пересекающихся в одной точке.

494. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных плоскостей равно $m : n$ (где m и n — данные отрезки).

495. Найти геометрическое место проекций данной точки A на все плоскости, проходящие через данную прямую.

496. Найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом (в частности, под прямымуглом).

497. Найти геометрическое место проекций данной точки пространства на плоскости, проходящие через другую данную точку.

498. Найти геометрическое место центров шаров, касающихся двух (трех) данных плоскостей.

499. Найти геометрическое место точек, для которых отношение расстояний от двух данных точек постоянно.

500. Найти геометрическое место точек, расстояния которых от трех данных точек относятся как $m : n : p$ (m, n, p — данные отрезки).

501. Найти геометрическое место точек пространства, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна.

502. Найти геометрическое место прямых, перпендикулярных к данной прямой и проходящих через данную точку.

503. Найти геометрическое место прямых, пересекающих данную прямую и параллельных другой прямой.

504. Найти геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и образующих равные углы с двумя данными скрещивающимися прямыми.

505. Найти геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и образующих равные углы с двумя данными плоскостями.

506. Найти геометрическое место осей конусов, касающихся двух данных плоскостей.

507. Найти геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и образующих данный угол с данной прямой.

Задачи на построение, решаемые при помощи геометрических мест точек

508. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. На прямой b построить точку, отстоящую от прямой a на данном расстоянии.

509. Дана прямая a и две точки A и B, не лежащие на данной прямой. На прямой a построить точку M так, чтобы $AM^2 - BM^2 = c^2$, где c — данный отрезок.

510. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, и плоскость α. В плоскости α построить точку M так, чтобы $AM : BM : CM = m : n : p$, где m, n, p — данные отрезки.

511. Даны плоскость α и две точки A и B, не лежащие в плоскости. В плоскости α построить точку M так, чтобы отрезки MA и MB составляли с плоскостью α равные углы и чтобы $\angle AMB = 90°$.

512. Даны ромб и сферическая поверхность. На данной сферической поверхности построить точку, равноудаленную от сторон ромба.

513. Даны три прямые a, b и c, образующие треугольник, и плоскость α. В плоскости α построить точку, равноудаленную от данных трех прямых.

514. Даны четыре прямые a, b, c и d. Прямые a, b и c параллельны друг другу и не лежат в одной плоскости, а прямая d пересекает прямую c. Построить точку, равноудаленную от данных четырех прямых.

515. Даны две точки A и B и прямая l, не проходящая через точки A и B. Через точку B провести плоскость ε так, чтобы проекция точки A на плоскость ε лежала на данной прямой l.

516. Даны прямая a и окружность, плоскость которой параллельна прямой. На данной окружности построить точку, отстоящую от прямой a на данном расстоянии.

517. Даны точка A, сфера $O(r)$ и плоскость α. На сфере $O(r)$ построить точку, отстоящую от α на данном расстоянии так, чтобы она лежала на касательной, проведенной из точки A к данной сфере.

518. Даны две точки A, B и окружность. На данной окружности построить точку M так, чтобы $AM^2 + BM^2 = a^2$, где a — данный отрезок.

519. Даны три плоскости α, β, γ и точка A, причем плоскости α и β пересекаются. В плоскости γ построить точку M так, чтобы $AM = p$ и отношение расстояний от M до плоскостей α и β равнялось $m : n$ (здесь p, m, n — данные отрезки).

520. Даны три прямые a, b и c, проходящие через точку O и не лежащие в одной плоскости, и две пересекающиеся плоскости α и β, не проходящие через точку O. Построить сферу, касающуюся данных двух плоскостей α и β так, чтобы ее центр был равноудален от прямых a, b и c.

521. Построить сферическую поверхность, касающуюся данной плоскости в данной на ней точке и проходящую через другую данную точку.

522. Построить сферическую поверхность, касающуюся двух данных плоскостей и проходящую через две точки, не лежащие в данных плоскостях.

523. Найти центр сферической поверхности, проходящей через четыре данные точки, не лежащие в одной плоскости.

524. Построить сферическую поверхность, которая касается четырех плоскостей, образующих тетраэдр.

525. На данной плоскости найти точку, равноудаленную от вершин данного треугольника, не лежащего в данной плоскости.

526. Даны три попарно скрещивающиеся прямые a, b, c. Провести прямую, пересекающую данные прямые соответственно в трех точках M, N и P, так, чтобы точка N была серединой отрезка MP.

527. Даны окружность и две точки A и B, не лежащие на ней. На данной окружности найти точку, разность квадратов расстояний которой от точек A и B равна квадрату данного отрезка.

528. На данной конической поверхности найти точку, равноудаленную от трех данных точек, не лежащих на одной прямой.

529. Даны две параллельные плоскости α и β, плоскость γ, пересекающая их, и точка A, не лежащая ни на одной из данных плоскостей. Через данную точку A провести прямую так, чтобы середина отрезка этой прямой, заключенного между плоскостями α и β, лежала на плоскости γ и была на данном расстоянии от точки A.

530. На данной плоскости α построить прямую, каждая точка которой равноудалена от двух точек, не лежащих в плоскости α.

Задачи на построение, решаемые при помощи геометрических мест прямых

531. Даны три плоскости α, β и γ, не пересекающиеся в одной точке. Построить коническую поверхность так, чтобы она касалась плоскостей α и β и чтобы ее ось лежала в плоскости γ.

532. Через данную точку пространства провести касательную к данной сфере так, чтобы она была перпендикулярна к данной прямой.

533. Даны коническая поверхность и прямая l, не проходящая через вершину этой поверхности. Построить образующую данной поверхности, перпендикулярную к прямой l.

534. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и плоскость α. Прямые a и b пересечь третьей прямой так, чтобы она была перпендикулярна к плоскости α.

535. Построить ось конической поверхности, если даны три образующие этой поверхности.

536. Построить коническую поверхность, если известны две образующие этой поверхности и угол, который составляют образующие с осью этой поверхности*.

537. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и точка A. Через точку A провести прямую так, чтобы она составила данный угол φ как с прямой a, так и с прямой b.

538. Даны три плоскости, пересекающиеся в одной точке. Построить коническую поверхность так, чтобы данные плоскости касались этой поверхности.

539. Даны точка A, прямая a, не проходящая через A, плоскость α. Через данную точку A провести прямую, пересекающую прямую a и составляющую данный угол φ с плоскостью α.

540. Даны плоскость и пересекающая ее, но не перпендикулярная к ней прямая. Построить в данной плоскости прямую, проходящую через точку ее пересечения с данной прямой и образующую с последней данный острый угол.

541. Через данную точку провести прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые, в предположении, что данная точка не лежит ни на одной из данных прямых.

542. Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости и пересекающую данную прямую.

543. Построить прямую, пересекающую две данные прямые l_1, l_2 и параллельную третьей прямой l_0.

544. Построить прямую, пересекающую две данные прямые, перпендикулярную к третьей данной прямой и параллельную данной плоскости.

545. Даны плоскость α и пересекающая ее прямая a. В плоскости α провести прямую, пересекающую прямую a и параллельную другой данной плоскости.

546. Провести в данной плоскости α прямую, перпендикулярную к данной прямой, не лежащей в α, и проходящую через данную точку.

547. Через точку M, взятую в плоскости α, провести прямую, образующую с плоскостью α данный угол и в то же время перпендикулярную к данной прямой, лежащей в этой плоскости.

548. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и плоскость α. Прямые a и b пересечь третьей прямой так, чтобы она была параллельна плоскости α и перпендикулярна к прямой a.

549. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и третья прямая c. Построить отрезок AB, параллельный прямой c, так, чтобы концы его лежали на прямых a и b.

---

* См. сноску на стр. 38.

550. Даны две прямые a и b и точка A, не лежащая на данных прямых. Через данную точку провести прямую так, чтобы она пересекала прямую a и составила данный угол с прямой b.

551. Даны плоскость α и две точки A и B, причем точка A лежит, а точка B не лежит в плоскости α. В плоскости α через точку A провести прямую так, чтобы проекция точки B на эту прямую отстояла от точки B на данное расстояние.

ЧАСТЬ III

ЗАДАЧИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ, РЕШАЕМЫЕ МЕТОДАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

XII. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ, КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА И ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ

552. Дан произвольный треугольник ABC. Доказать, что существует треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого соответственно равны и параллельны медианам исходного треугольника ABC.

553. Из медиан треугольника ABC построен новый треугольник $A_1B_1C_1$, из его медиан — треугольник $A_2B_2C_2$. Показать, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны; найти коэффициент подобия.

554. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и B_1, которые делят эти стороны в данных отношениях: $\frac{AC_1}{C_1B} = \lambda$; $\frac{AB_1}{B_1C} = \mu$. В каком отношении делят друг друга отрезки BB_1 и CC_1? Что получится, если $\lambda = \mu = 1$?

555. Доказать, что биссектриса внутреннего или внешнего угла треугольника делит противоположную сторону внутренним или внешним образом на две части, пропорциональные прилежащим сторонам.

556. Сформулировать и доказать предложение, обратное теореме задачи 555.

557. На стороне AB и на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки E и F так, что $AE = \frac{1}{n}AB$ и $AF = \frac{1}{n+1}AC$. Доказать, что точки E, F и D лежат на одной прямой, и определить отношение отрезков EF и FD.

558. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Вычислить острый угол φ между ними.

559. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

560. Вывести следующие формулы для решения косоугольных треугольников:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$
$$b = a\cos C + c\cos A$$
$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}.$$

561. В треугольнике ABC проведена медиана CC_1. Показать, что произведение стороны AB и проекции медианы CC_1 на эту сторону равно полуразности квадратов двух других сторон треугольника.

562. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр CC_1 на гипотенузу AB. В каком отношении делится отрезок AB точкой C_1? Выразить CC_1 через $a = CB$ и $b = CA$.

563. В треугольнике ABC проведен отрезок A_1B_1, параллельный стороне AB, где точки A_1 и B_1 лежат соответственно на сторонах AC и BC. Показать, что если $AB_1 = BA_1$, то треугольник ABC равнобедренный.

564. Показать, что сумма квадратов медиан треугольника относится к сумме квадратов его сторон, как 3 : 4.

565. Показать, что если медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны, то $\cos C \geqslant \frac{4}{5}$.

566. В треугольнике ABC проведена биссектриса CC_1. Вывести формулу для вычисления биссектрисы CC_1 по двум сторонам $CA = b$ и $CB = a$ и углу γ между ними.

567. В квадрат $ABCD$ вписан прямоугольник $KLMN$ так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Показать, что:

1) либо прямоугольник также есть квадрат;

2) либо стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

568. Треугольник $A_1B_1C_1$ симметричен прямоугольному треугольнику ABC относительно биссектрисы прямого угла C. Показать, что медиана одного треугольника и высота другого, проведенные из общей вершины C, совпадают по направлению.

569. Доказать, что полусумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату половины третьей стороны, сложенному с квадратом соответствующей медианы.

570. Доказать, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану на две части, относящиеся друг к другу, как 2 : 1, считая от вершины.

571. Треугольник $A_1B_1C_1$ вписан в треугольник ABC так, что стороны второго делятся вершинами первого в одном и том же отношении: $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = \lambda$.

Показать, что точки пересечения медиан обоих треугольников совпадают.

572. Показать, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

573. Доказать, что в трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей, параллелен основаниям и равен их полуразности.

574. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом при вершине B; BS — его высота, K — середина высоты BS, а M — точка пересечения прямой AK со стороной BC. Определить отношения, в которых точка M делит отрезки BC и AK.

575. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ из вершины A опущен перпендикуляр AA_1 на сторону CD. Определить отношение, в котором перпендикуляр AA_1 делит диагональ BD.

576. Доказать теорему Менелая (см. задачу 93).

577. Доказать теорему Чевы (см. задачу 97).

578. Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других сторон. Доказать.

579. Дан параллелограмм $ABCD$; доказать, что его площадь в два раза меньше площади параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, стороны которого соответственно параллельны и равны диагоналям AC и BD исходного параллелограмма.

580. Вывести формулу, выражающую площадь S треугольника через длины его сторон a, b, c.

581. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$, будучи продолженными, пересекаются в точке O. Обозначая через S и P соответственно середины диагоналей BD и AC, показать, что площадь треугольника OSP равна четвертой части площади четырехугольника $ABCD$.

582. Внутри треугольника ABC взята точка O. Доказать, что треугольники OAB, OBC и OCA равновелики тогда и только тогда, когда O является точкой пересечения медиан.

XIII. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА И ТОЧКИ В ПРОСТРАНСТВЕ

583. Между двумя параллельными плоскостями заключены перпендикуляр длиной a и наклонная длиной b. Расстояния между их концами в каждой плоскости равны c. Найти расстояние между серединами перпендикуляра и наклонной.

584. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

585. Доказать, что четыре отрезка, соединяющие каждую вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, пересекаются в одной точке G. В каком отношении указанные отрезки делятся точкой G?

586. Если в неплоском шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ противоположные стороны параллельны, то диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

587. Дан тетраэдр $SABC$; зная длины шести его ребер: $SA = a$, $BC = a'$, $SB = b$, $AC = b'$, $SC = c$, $AB = c'$, определить длину отрезка, концы которого — в серединах A_1 и A_2 ребер SA и BC.

588. Доказать, что при любом расположении четырех точек A, B, C, D в пространстве сумма попарных произведений длин отрезков BC и AD, CA и BD, AB и CD, умноженных соответственно на косинусы углов между ними, равна нулю.

589. Если в тетраэдре $ABCD$ две пары противоположных ребер взаимно перпендикулярны, то это же справедливо для третьей пары. Доказать.

590. Показать, что в правильной треугольной пирамиде $SABC$ противоположные ребра взаимно перпендикулярны.

591. В условиях задачи 587 найти угол φ между ребрами SA и BC.

592. Диагональ AE прямоугольного параллелепипеда образует с двумя ребрами, выходящими из точки A, углы по $60°$. Какой угол она образует с третьим ребром, выходящим из той же точки A?

593. Прямая составляет равные углы с ребрами прямого трехгранного угла. Найти эти углы.

594. Найти угол между двумя биссектрисами плоских углов прямого трехгранного угла.

595. Плоскость пересекает ребра трехгранного угла, у которого все плоские углы прямые, в точках A, B и C. Найти косинусы углов треугольника ABC, если перпендикуляр, опущенный из вершины трехгранного угла на плоскость, образует с его ребрами острые углы α, β и γ.

596. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c; ребро c является его высотой. Найти угол, составленный диагональю параллелепипеда с непересекающей ее диагональю основания.

597. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, в которой боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α; точка K — середина ребра BS. Найти угол φ между прямыми AK и SC.

598. В трехгранном угле с вершиной S проведены параллельные сечения ABC и $A_1B_1C_1$. Обозначая через V, V_1, V_2, V_3 соответственно объемы тетраэдров $SABC$; $SA_1B_1C_1$; SA_1BC; SAB_1C_1, показать, что $V_2 = \sqrt[3]{V^2V_1}$ и $V_2 \cdot V_3 = V \cdot V_1$.

599. Доказать, что высоты тетраэдра $SABC$ попарно пересекаются тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух противоположных ребер одна и та же для всех трех пар.

600. Найти площадь основания ABC тетраэдра $SABC$, зная длины боковых ребер a, b, c и плоские углы α, β, γ при вершине S.

601. В тетраэдре $OABC$ ребра $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Доказать, что

$$\operatorname{ctg} A = \frac{a^2 + bc\cos\alpha - ab\cos\gamma - ac\cos\beta}{2S},$$

где S — площадь треугольника ABC, а A — его угол при вершине A.

602. На каждой из трех взаимно перпендикулярных плоскостей взять по одной точке так, чтобы они вместе с точкой пересечения плоскостей служили вершинами правильного тетраэдра с ребрами, равными a. Вычислить объем этого тетраэдра.

603. Точки K, L, M, N взяты соответственно на сторонах OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3O неплоского четырехугольника $OA_1A_2A_3$, причем $\frac{OK}{KA_1} = \varkappa$, $\frac{A_1L}{LA_2} = \lambda$, $\frac{A_2M}{MA_3} = \mu$, $\frac{A_3N}{NO} = \nu$. Для того чтобы точки K, L, M и N лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно выполнение равенства: $\varkappa\lambda\mu\nu = 1$. Доказать.

604. Доказать, что любая плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер тетраэдра, делит объем его пополам.

XIV. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

605. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников, две вершины которых — в данных точках A и B, а третьи вершины лежат на данной прямой l.

606. Найти геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние от заданной точки вдвое больше расстояния от заданной прямой, проходящей через эту точку.

607. Прямая линия перемещается так, что отрезки, отсекаемые ею на двух взаимно перпендикулярных прямых l и m, сохраняют постоянное отношение λ. Найти траекторию точки, делящей отрезок подвижной прямой, заключенный между прямыми l и m, в отношении μ.

608. Найти геометрическое место середин отрезков, отсекаемых сторонами угла на параллельных прямых.

609. Даны точка A и окружность радиуса $r = 2$; расстояние точки A от центра окружности O равна 6. Найти на прямой OA такую точку M, чтобы длина касательной, проведенной из нее к окружности, была равна расстоянию точки M до точки A.

610. Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B равна k^2, где k — данный отрезок.

611. Данный угол φ вращается вокруг своей вершины. На сторонах его от вершины откладывают отрезки переменной длины, отношение которых постоянно и равно λ. Если конец переменного отрезка на одной стороне описывает данную прямую l, то какую линию описывает конец отрезка на другой стороне?

612. В треугольнике стороны AB и AC разделены в отношении $\lambda = 3$, считая от общей вершины A. Доказать, что прямые, соединяющие точки деления с противолежащими вершинами, и медиана AA_1 пересекаются в одной точке.

613. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям. Доказать, что точка пересечения диагоналей трапеции является серединой отрезка этой прямой, концы которого лежат на непараллельных сторонах трапеции.

614. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом в вершине C. Найти геометрическое место точек C, если вершины A и B данного треугольника скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым, а стороны и углы его не меняются.

615. Даны окружность $O(r)$ и две взаимно перпендикулярные прямые l и m. Прямой угол с вершиной в точке O, вращаясь вокруг этой точки, пересекает окружность в точках A и B. Через эти точки проведены две прямые, соответственно параллельные данным прямым l и m. Найти геометрическое место точек пересечения этих прямых.

616. Даны две точки A и B. Через одну из точек отрезка AB проведена прямая l, перпендикулярная к этому отрезку. Переменная окружность проходит через точки A и B и пересекает прямую l в двух точках C_1 и C_2. Найти геометрическое место точек переменной окружности, диаметрально противоположных этим точкам.

617. Даны прямая CD и две точки A и B по одну сторону от этой прямой на расстояниях от нее, равных 6 и 9; расстояние между точками равно 5. Найти на прямой CD такую точку M, чтобы угол AMC был бы равен углу BMD (задача о биллиарде).

618. Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма; доказать, что его центр лежит на середине отрезка, который соединяет середины диагоналей данного четырехугольника.

619. В прямоугольном треугольнике ABC катеты соответственно равны: $AC = 15$, $BC = 20$; на гипотенузе AB отложен отрезок $AD = 4$; точка D соединена с вершиной C. Найти длину CD.

620. Основания равнобочной трапеции равны $2a$ и $2b$, а высота ее равна h. Найти тот угол φ между диагоналями трапеции, который обращен к ее основаниям.

621. Стороны параллелограмма $ABCD$, выходящие из вершины A, равны a и b, а угол между ними равен α. Найти угол φ между диагоналями параллелограмма, обращенный к стороне b.

622. Дан треугольник с высотой, равной 5, которая делит основание треугольника на части, равные 4 и 6. Найти сторону вписанного в треугольник квадрата, две вершины которого лежат на основании треугольника.

623. Даны две прямые a и b, пересекающиеся в точке O. Найти геометрическое место четвертых вершин квадратов, две вершины которых лежат на прямой a, а третьи вершины — на прямой b.

624. Даны две параллельные прямые, расстояние между которыми равно 12, и точка A, находящаяся между ними на расстоянии 10 от одной из них. На каком расстоянии от точки A надо провести общий перпендикуляр к этим прямым, чтобы его отрезок, заключенный между ними, был виден из данной точки A под углом в $45°$?

625. В треугольнике ABC точка H есть точка пересечения высот, а C_1 — основание высоты, проведенной из точки C на сторону AB. Зная сторону $AB = 8$ и отрезки $HB = 5$ и $HC_1 = 4$, определить BC и AC.

626. Доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

627. Доказать, что во всяком треугольнике перпендикуляры, восставленные в серединах сторон, пересекаются в одной точке.

628. Решить задачу 67 методами аналитической геометрии.

629. В треугольнике $A_1A_2A_3$ через E_1, E_2, E_3 обозначены соответственно середины сторон A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, через H_1, H_2, H_3 — основания высот, проведенных из вершин A_1, A_2, A_3, через H — ортоцентр, через K_1, K_2, K_3 — середины отрезков A_1H, A_2H, A_3H и через S — центр описанной окружности. Доказать, что отрезки E_1K_1, E_2K_2, E_3K_3 равны между собой и имеют общую середину, совпадающую с серединой отрезка SH.

Основываясь на этом результате, показать, что точки E_1, E_2, E_3, K_1, K_2, K_3, H_1, H_2 H_3 лежат на одной окружности (круг девяти точек Эйлера).

630. Дан равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = AC = a$, а основание $BC = 2c$. Вычислить площадь треугольника, вершины которого служат основаниями высот данного треугольника ABC.

631. Пусть $ABCD$ — квадрат, а A_1, B_1, C_1, D_1 — середины сторон BC, CD, DA и AB. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 образуют при пересечении также квадрат, площадь которого составляет пятую часть площади данного квадрата.

632. Точка движется так, что расстояния ее от двух данных пересекающихся прямых остаются все время в постоянном отношении. Найти ее траекторию.

633. Вычислить расстояние между противоположными сторонами ромба, если длины его диагоналей равны a и b.

634. Стороны остроугольного треугольника равны: $AB = 5$, $AC = 7$ и высота $BB_1 = 4$. Найти длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины A.

635. Дан $\angle BAC = 45°$ и точка M, лежащая внутри него и отстоящая от сторон угла AB и AC соответственно на 1 и $2\sqrt{2}$. Через точку M провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами данного угла, делился в точке M пополам *.

* Предполагается, что при выбранной системе координат прямая строится по ее уравнению.

636. Доказать, что в равностороннем треугольнике сумма расстояний внутренней точки от трех его сторон есть величина постоянная.

637. Доказать, что если d_1, d_2, d_3 обозначают соответственно расстояния точки M, лежащей внутри треугольника, от трех его сторон и h_1, h_2, h_3 — соответственно высоты треугольника, то имеет место равенство: $\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} = 1$. Как выбрать знаки расстояний d_1, d_2, d_3, чтобы это предложение осталось верным и для любой точки плоскости?

638. Доказать, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от точки, лежащей на основании или на его продолжении, до двух других сторон есть величина постоянная.

XV. ОКРУЖНОСТЬ

639. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух заданных точек постоянно.

640. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная.

641. Дана окружность радиуса r. Через одну из ее точек проведены всевозможные хорды. Найти геометрическое место точек, делящих эти хорды в одном и том же отношении λ.

642. На окружности даны две диаметрально противоположные точки A и B. Пусть P — произвольная точка окружности, а M — точка вне окружности, лежащая на луче AP и отстоящая от точки P на расстоянии $PM = PB$. Найти геометрическое место точек M.

643. Найти геометрическое место точек, степени которых относительно двух данных окружностей находятся в постоянном отношении λ. Рассмотреть частный случай, когда $\lambda = 1$.

644. Найти геометрическое место точек, разность степеней которых относительно данных двух окружностей имеет данное значение.

645. Даны три прямые, попарно пересекающиеся в трех различных точках A, B и C. Доказать, что геометрическое место точек плоскости, обладающих тем свойством, что основания перпендикуляров, опущенных из этих точек на данные прямые, лежат на одной прямой, есть окружность, проходящая через точки A, B и C.

646. Доказать, что при инверсии с полюсом в точке O:

а) прямая, проходящая через O, переходит сама в себя;

б) прямая, не проходящая через точку O, преобразуется в окружность, проходящую через полюс;

в) окружность, не проходящая через точку O, преобразуется в окружность, не проходящую через эту точку*.

---

* Инверсией на плоскости с полюсом O и степенью инверсии k^2 называется точечное преобразование, которое каждой точке M ставит в соответствие точку M' плоскости, лежащую на прямой OM и удовлетворяющую условию:

$$OM \cdot OM' = k^2.$$

647. Из точки O проведены к окружности две взаимно перпендикулярные секущие OAA_1 и OBB_1. Доказать, что диагональ прямоугольника, построенного на отрезках OA и OB, перпендикулярна к прямой A_1B_1.

XVI. ЭЛЛИПС

648. Вершина A треугольника ABC, имеющего неподвижное основание $BC = 2c$, перемещается так, что периметр $2p$ сохраняет постоянную величину. Найти траекторию вершины A (в частности, рассмотреть случай, когда $BC = 24$, $p = 25$).

649. В эллипс с осями 12 и 6 вписан правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с какой-либо вершиной эллипса. Найти длину стороны треугольника.

650. Через фокус эллипса с осями $2a$ и $2b$ проведена хорда, перпендикулярная к большой оси. Найти длину этой хорды.

651. Вычислить длину сторон квадрата, вписанного в эллипс с осями $2a$ и $2b$.

652. Найти те касательные эллипса с осями $2\sqrt{15}$ и $\frac{3}{2}\sqrt{10}$, расстояние которых от центра эллипса равно 3.

653. Доказать, что произведение расстояний любой касательной эллипса от двух его фокусов есть величина постоянная, равная квадрату малой оси.

654. В концах A_1 и A_2 большой оси эллипса с полуосями $2a$ и $2b$ проведены касательные l_1 и l_2. В произвольной точке M эллипса проведена касательная, которая пересекает прямые l_1 и l_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Доказать, что произведение $A_1B_1 \cdot A_2B_2$ не зависит от выбора точки M.

655. Доказать, что отрезок касательной к эллипсу в любой точке, заключенный между касательными, проведенными в вершинах на большой оси, виден из фокусов под прямым углом.

656. Доказать, что всякая касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами точки прикосновения.

657. Найти геометрическое место точек плоскости, из которых эллипс виден под прямым углом.

658. Дан эллипс с осями $2a$ и $2b$. Найти геометрическое место середин его параллельных хорд.

659. Доказать, что касательные к эллипсу с осями $2a$ и $2b$, проведенные в концах одного и того же диаметра, параллельны между собой.

660. Доказать, что если две касательные к эллипсу параллельны, то их точки касания лежат на одном и том же диаметре, сопряженном направлению касательных.

661. Найти стороны квадрата, описанного около эллипса с полуосями a и b.

662. В эллипс с осями $2a$ и $2b$ вписан треугольник A_1MA, одна из сторон которого A_1A совпадает с большой осью. Вершина

M движется по эллипсу. Определить траекторию, которую при этом опишет центр тяжести треугольника A_1MA.

663. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний от каждой из которых до данной точки и до данной прямой, не проходящей через точку, равно λ, где $0 < \lambda < 1$. В частности, рассмотреть случай, когда $\lambda = \frac{1}{2}$.

664. Директриса эллипса, соответствующая его фокусу F, пересекает фокальную ось в точке K. Доказать, что точки F и K гармонически сопряжены с вершинами эллипса*.

665. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. На отрезке или на его продолжении взята точка M; найти траекторию, которую она описывает при указанном скольжении.

666. Дан эллипс с осями $2a$ и $2b$. Найти геометрическое место середин его хорд, проведенных из конца его малой оси.

667. Найти геометрическое место центров окружностей, которые касаются окружности радиуса r и проходят через точку A, отстоящую от центра O заданной окружности на расстоянии, равном $a < r$.

668. Два эллипса с соответственно пропорциональными полуосями расположены так, что их большие оси лежат на одной прямой, а центры совпадают. Доказать, что два отрезка, заключенные между эллипсами на любой секущей прямой, равны друг другу.

669. Построить с помощью эллипсографа треугольник по его основанию, сумме двух других сторон и высоте.

XVII. ГИПЕРБОЛА

670. Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы до двух асимптот есть величина постоянная.

671. На гиперболе с полуосями a и b найти точку, отношение расстояний которой от двух асимптот равно λ.

672. К гиперболе с полуосями 3 и 4 провести касательную так, чтобы она находилась на одинаковом расстоянии от центра гиперболы и от одного из фокусов.

673. Доказать, что произведение расстояний любой касательной к гиперболе от двух ее фокусов есть величина постоянная.

674. Доказать, что отрезок любой касательной гиперболы, заключенный между асимптотами, делится в точке прикосновения пополам.

675. Доказать, что касательная гиперболы образует равные углы с фокальными радиусами точки касания.

---

* Точки F и K называются гармонически сопряженными с точками A и A_1, лежащими на прямой FK, если точки F и K делят отрезок AA_1 внешним и внутренним образом в одном и том же отношении.

676. Найти геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых касаются данной гиперболы.

677. Доказать, что если эллипс и гипербола имеют общие фокусы, то они пересекаются под прямым углом.

678. Решить задачу 663 в предположении, что $\lambda > 1$.

679. Доказать, что отрезок асимптоты гиперболы, заключенный между центром и директрисой, равен действительной полуоси. Пользуясь этим свойством, построить директрисы гиперболы.

680. Доказать, что директриса гиперболы проходит через основание перпендикуляра, опущенного из соответствующего фокуса на асимптоту гиперболы. Вычислить длину этого перпендикуляра.

681. Найти геометрическое место точек пересечения перпендикуляров, опущенных из фокуса гиперболы на касательные, с прямыми, соединяющими центр с соответствующими точками прикосновения.

682. Вершины B и D прямоугольника $ABCD$ скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым, пересекающимся в точке A. Найти геометрическое место вершин C при условии, что площадь прямоугольника остается без изменения.

683. Прямая a перемещается так, что треугольник, образованный ею с двумя взаимно перпендикулярными прямыми l и m, сохраняет постоянную площадь S. Найти геометрическое место точек, делящих в данном отношении λ отрезок, отсекаемый на прямой a прямыми l и m.

684. Через одну из вершин гиперболы с осями $2a$ и $2b$ проведены всевозможные хорды. Найти геометрическое место их середин.

685. Найти геометрическое место середин фокальных радиусов всех точек гиперболы с осями $2a$ и $2b$, проведенных из одного и того же фокуса.

686. Какому условию должны удовлетворять полуоси a и b гиперболы для того, чтобы в нее можно было вписать квадрат?

687. Найти геометрическое место центров окружностей, отсекающих на двух взаимно перпендикулярных прямых отрезки, длины которых соответственно равны $2a$ и $2b$.

688. Дана точка A, лежащая вне окружности. Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через точку A и касающихся данной окружности.

689. Два луча, исходящие соответственно из неподвижных точек A и B и пересекающиеся в точке M, вращаются так, что абсолютная величина разности углов при вершинах A и B в треугольнике AMB равна $\frac{\pi}{2}$. Найти геометрическое место точек M.

690. Даны две взаимно перпендикулярные прямые l и m и точка A, не лежащая на данных прямых. В точках пересечения любой прямой пучка с центром A с прямыми l и m восставлены перпендикуляры. Найти геометрическое место точек их пересечения.

XVIII. ПАРАБОЛА

691. Вычислить длину сторон правильного треугольника ABC, вписанного в параболу с параметром p.

692. Через фокус параболы с параметром p проведена хорда, перпендикулярная к ее оси. Найти длину этой хорды.

693. Найти длины сторон треугольника, вписанного в параболу с параметром p, зная, что одна из его вершин совпадает с вершиной параболы, а точка пересечения высот совпадает с фокусом параболы.

694. В точках A и B параболы проведены касательные, которые пересекаются в точке C, лежащей на ее оси l. Доказать, что отрезок оси, заключенный между точкой C и точкой пересечения прямых AB и l, делится в вершине параболы пополам.

695. Доказать, что любая касательная к параболе пересекает директрису и хорду, проходящую через фокус и перпендикулярную к оси, в двух точках, равноудаленных от фокуса.

696. Доказать, что геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на ее касательные, есть касательная в вершине параболы.

697. Найти геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых касаются данной параболы.

698. Доказать, что прямая соединяющая точки прикосновения двух касательных к параболе, проведенных из любой точки директрисы, проходит через фокус параболы.

699. Доказать, что касательная к параболе составляет равные углы с фокальным радиусом точки касания и с лучом, проходящим через точку касания, параллельно оси параболы.

700. Доказать, что две параболы, имеющие общую ось и общий фокус, лежащий между вершинами парабол, пересекаются под прямым углом.

701. Найти геометрическое место середин всех хорд параболы, проходящих через ее фокус.

702. Найти геометрическое место середин параллельных хорд параболы.

703. Расссматриваются прямоугольные треугольники с общей вершиной прямого угла, у которых вершины одних острых углов лежат на прямой l, гипотенузы перпендикулярны к прямой l. Найти геометрическое место вершин вторых острых углов этих треугольников.

704. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами a и b. Оба катета разделены на одинаковое число равных частей. Через точки деления катета a, перенумерованные начиная от вершины угла B, проведены прямые, параллельные катету b, а точки деления катета b, перенумерованные от вершины угла C, соединены прямыми линиями с вершиной противолежащего угла B. Доказать, что точки пересечения прямых, проведенных из тех точек деления катетов, которые имеют одинаковые номера, принадлежат параболе.

705. Прямой угол вращается около своей вершины, совпадающей с вершиной параболы. Доказать, что при этом движении прямая линия, соединяющая точки пересечения сторон угла с параболой, тоже вращается около некоторой точки, лежащей на оси параболы.

706. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся окружности радиуса r и прямой l, проходящей через центр этой окружности.

707. Доказать, что если две параболы со взаимно перпендикулярными осями пересекаются в четырех точках, то эти точки лежат на одной окружности.

708. Через фокус F конического сечения проведена произвольная прямая l, пересекающая его в точках A и B. Доказать, что $\frac{FA \cdot FB}{AB}$ не зависит от выбора прямой l.

XIX. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

709. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от трех вершин данного треугольника.

710. Решить задачу 484 методами аналитической геометрии.

711. Вычислить ребро куба, который можно поместить внутри треугольной пирамиды со взаимно перпендикулярными боковыми ребрами, равными 6, 18 и 9, так, чтобы три грани его совпадали с боковыми гранями пирамиды, а вершина, противолежащая вершине пирамиды, лежала на основании пирамиды.

712. Прямоугольник со сторонами a и b перегнут по диагонали так, что плоскости полученных треугольников образовали прямой двугранный угол. Определить расстояние между вершинами прямоугольника, не лежащими на ребре двугранного угла.

713. Куб с ребром a пересечен плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон одной из граней и через центр противолежащей грани. Определить периметр полученного в сечении многоугольника.

714. В тетраэдре $A_1A_2A_3A_4$ через середину каждого ребра проведена плоскость, перпендикулярная к этому ребру. Доказать, что эти плоскости пересекаются в одной точке.

715. В тетраэдре $A_1A_2A_3A_4$ через середину каждого ребра проведена плоскость, перпендикулярная к противоположному ребру. Доказать, что эти плоскости пересекаются в одной точке.

716. Показать, что плоскость, перпендикулярная к диагонали куба и проходящая через ее середину, пересекает куб по правильному шестиугольнику.

717. Куб с ребром a пересечен плоскостью, перпендикулярной к одной из его диагоналей и отстоящей от одного из концов этой диагонали на расстоянии h. Исследовать форму сечения.

718. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковая грань наклонена к основанию под углом β, K — середина ребра BS. Найти угол φ между плоскостями AKC и SAB.

719. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота $OS = h$, сторона основания равна a, точка K — середина ребра SB. Найти угол φ между плоскостями AKC и SBC.

720. В данной правильной треугольной призме боковое ребро равно стороне основания a. Найти площадь сечения, проведенного через сторону основания под углом $60°$ к плоскости основания.

721. В основании пирамиды $SOACB$ лежит прямоугольник $OACB$ со сторонами $OA = a$, $OB = b$; ребро OS перпендикулярно к плоскости основания и равно h. На стороне основания AC пирамиды взята такая точка K, что $AK = c$. Найти угол φ между плоскостями SBC и SOK.

722. В предыдущей задаче точка L — центр тяжести грани SAC пирамиды $SOACB$, прямая OL пересекает плоскость SBC в точке M. Найти расстояние от точки M до плоскости SOB.

723. Доказать, что для высоты h треугольной пирамиды с взаимно перпендикулярными боковыми ребрами, равными a, b и c, справедливо соотношение: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$.

724. Даны две скрещивающиеся прямые; найти геометрическое место середин отрезков, соединяющих каждую точку первой прямой с каждой точкой второй прямой.

725. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Найти угол φ между прямой SC и плоскостью SAB.

726. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковая грань наклонена к плоскости основания под углом β, точка K — середина ребра SB. Найти угол φ между прямой AK и плоскостью SCD.

727. В условии задачи 721 найти угол φ между прямой SC и плоскостью SOK.

728. Плоские углы трехгранного угла с вершиной S равны: $\angle ASB = \alpha$; $\angle ASC = \beta$; $\angle CSB = 90°$. Найти угол φ между ребром AS и гранью BSC; рассмотреть частный случай, когда $\alpha = \beta = 60°$.

729. Доказать, что существует бесчисленное множество прямых, пересекающих три данные прямые l_1, l_2, l_3, из которых никакие две не лежат в одной плоскости.

730. Решить задачу 543 методами аналитической геометрии.

731. Дан куб, ребро которого равно a. Вычислить расстояние между вершиной A куба и его диагональю, не проходящей через точку A и лежащей в том диагональном сечении куба, которое содержит эту точку.

732. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c; ребро длины c является его высотой. Найти кратчайшее расстояние между диагональю параллелепипеда и не пересекающей ее диагональю основания.

733. В пространстве даны три прямые; угол между первой и третьей прямой равен α_1, кратчайшее расстояние между ними равно d_1, угол между второй и третьей прямой равен α_2, а кратчайшее расстояние между ними равно d_2. Общий перпендикуляр к первой и третьей прямой пересекает под прямым углом общий перпендикуляр ко второй и третьей прямой. Найти угол φ и кратчайшее расстояние d между первой и второй прямой.

734. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота SO равна h, диагональ основания равна $2a$; точка K — середина бокового ребра SB. Через вершину пирамиды S проведена прямая SQ, параллельная диагонали основания BD. Найти угол φ между прямыми AK и SQ, кратчайшее расстояние d между ними и расстояние от точки S до точки пересечения прямой SQ с общим перпендикуляром к прямым AK и SQ.

735. В условиях предыдущей задачи найти кратчайшее расстояние d между прямыми BC и AK. Обозначив далее через M и N точки пересечения прямых BC и AK с общим перпендикуляром к ним, узнать, в каком отношении λ_1 точка M делит отрезок BC и в каком отношении λ_2 точка N делит отрезок AK. Ответ проверить для предельного случая, когда $h = 0$ (см. задачу **574**). При каком условии точка N совпадает с точкой K?

736. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота $OS = h$, сторона основания равна a, точка K — середина ребра SB. Найти угол φ и кратчайшее расстояние d между прямыми AK и BC.

XX. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

737. Решить задачу 501 методами аналитической геометрии.

738. Найти геометрическое место середин отрезков постоянной длины, концы которых лежат на двух данных взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых.

739. На окружностях оснований цилиндра с высотой h и радиусом основания r взяты соответственно точки A и B так, что отрезок $AB = c (c > h)$. Определить кратчайшее расстояние между прямой AB и осью цилиндра. (В частности, $h=6$, $r=5$, $AB = \sqrt{116}$.)

740. Решить задачу 499 методами аналитической геометрии.

741. Доказать, что через четыре точки, не лежащие в одной плоскости, проходит одна и только одна сфера.

742. Доказать, что при инверсии в пространстве с центром в точке O:

а) плоскость, проходящая через точку O, преобразуется сама в себя;

б) плоскость, не проходящая через точку O, преобразуется в сферу, проходящую через точку O;

в) сфера, не проходящая через точку O, преобразуется в сферу, не проходящую через точку O (см. сноску на стр. 51).

743. Найти геометрическое место точек, имеющих одну и ту же степень относительно двух данных сфер.

744. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная.

745. Найти сторону куба, вписанного в эллипсоид с полуосями a, b, c.

746. Прямая перемещается в пространстве так, что три ее фиксированные точки A, B, C скользят по трем взаимно перпендикулярным плоскостям. Найти траекторию движения точки M, произвольно выбранной на прямой.

747. Найти геометрическое место точек пространства, абсолютная величина разности расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная.

748. Найти поверхность, описанную прямой, вращающейся около оси, не лежащей с ней в одной плоскости.

749. Найти поверхность, которую описывает прямая, скользящая по трем прямым l_1, l_2, l_3, из которых никакие две не лежат в одной плоскости.

750. Доказать, что две прямолинейные образующие однополостного гиперболоида, принадлежащие к разным семействам, всегда лежат в одной плоскости, тогда как принадлежащие одному семейству — скрещиваются.

751. Доказать, что никакие три прямолинейные образующие однополостного гиперболоида, принадлежащие одному семейству, не параллельны одной плоскости.

752. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки A и данной плоскости, не проходящей через точку A.

753. По неподвижной параболе скользит вершина другой параболы, которая поступательно перемещается так, что плоскость ее остается перпендикулярной к плоскости неподвижной параболы. Найти поверхность, описываемую движущейся параболой.

754. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых.

755. Доказать, что две прямолинейные образующие гиперболического параболоида из разных семейств пересекаются, а из одного семейства — скрещиваются.

756. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от данной точки и от данной плоскости, проходящей через эту точку, постоянно.

XXI. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

757. Луч l, исходящий из неподвижной точки O, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Точка M, имея начальное положение в точке O, движется по лучу l равномерно со скоростью v.

Найти траекторию точки M, если скорости v и ω находятся в постоянном отношении: $\frac{v}{\omega} = a$.

758. В какую кривую преобразуется спираль Архимеда при инверсии с полюсом в точке O, где O — начало спирали*.

759. Найти траекторию, описываемую точкой M окружности радиуса a, катящейся без скольжения по прямой OA.

760. Найти траекторию, описываемую точкой M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по внешней стороне другой окружности радиуса R. В частности, рассмотреть случаи:

$$\text{а)}\ \ r = R; \qquad \text{б)}\ \ r = \frac{1}{2}R; \qquad \text{в)}\ \ r = \frac{1}{3}R.$$

761. Найти траекторию, описываемую точкой M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса R. В частности, рассмотреть случаи:

$$\text{а)}\ \ r = \frac{1}{2}R; \qquad \text{б)}\ \ r = \frac{1}{3}R; \qquad \text{в)}\ \ r = \frac{1}{4}R.$$

762. Отрезок длины a движется так, что его концы скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. Через концы A и B отрезка проведены прямые, параллельные сторонам угла. Найти траекторию основания M перпендикуляра, опущенного из точки C пересечения этих прямых на отрезок AB.

763. Даны прямая l и точка S, отстоящая от нее на расстоянии $a \neq 0$. Через точку S проводятся прямые, на каждой из которых от точки B пересечения с прямой l откладывается в обе стороны отрезок, равный b. Найти геометрическое место концов этих отрезков.

764. Даны окружность радиуса a и точка O на ней. Через точку O проводятся прямые, пересекающие окружность еще в одной точке S. На каждой из этих прямых от точки S откладывается в обе стороны отрезок, равный b. Найти геометрическое место концов этих отрезков. В частности, рассмотреть случаи: а) $b < 2a$; б) $b = 2a$; в) $b > 2a$.

765. Найти кривую, в которую преобразуется эллипс при инверсии, центр которой находится в одном из фокусов эллипса.

766. Найти кривую, в которую преобразуется гипербола при инверсии, центр которой находится в одном из фокусов гиперболы.

767. Найти кривую, в которую преобразуется парабола при инверсии, полюс которой находится в фокусе параболы.

768. Даны точка A и окружность радиуса b; расстояние центра S окружности от точки A равно a. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на касательные к данной окружности.

---

* См. сноску на стр. 51.

769. Даны окружность радиуса a и прямая l, касательная к ней. Из точки O окружности, диаметрально противоположной точке касания, проводится луч, пересекающий окружность в точке A и прямую l в точке B. На этом луче откладывается отрезок $OM = AB$. Найти траекторию точки M при вращении луча с центром в точке O.

770. Расстояние между двумя данными точками F и F_1 равно $2a$. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний которых до точек F_1 и F равно b^2, где b — постоянная.

771. Вершины A и B прямоугольного треугольника ABC скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым, пересекающимся в точке C так, что площадь треугольника остается неизменной. Найти геометрическое место оснований высот этих треугольников, проведенных из вершины прямого угла.

772. В какую кривую преобразуется при инверсии равнобочная гипербола, если центр инверсии совпадает с центром гиперболы?

773. На окружности диаметра a взята точка O. Через точку C, диаметрально противоположную точке O, к окружности проведена касательная. Луч, исходящий из неподвижной точки O, вращается, пересекая окружность и касательную соответственно в точках A и B. Из точки A проводится прямая, параллельная касательной, а из точки B — прямая, параллельная диаметру OC. Найти геометрическое место точек пересечения этих прямых.

774. Отрезок постоянной длины $2a$ скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым, пересекающимся в точке O. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки O на движущийся отрезок.

775. Нить, намотанная на окружность радиуса a, разматывается так, что в точке B, где нить отделяется от окружности, она остается касательной к ней. Найти линию, описываемую концом нити.

776. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных окружностей с радиусами R и r. Рассмотреть три случая:

а) одна из данных окружностей лежит внутри другой;

б) одна из данных окружностей лежит вне другой;

в) одна из данных окружностей вырождается в прямую, не пересекающую вторую окружность.

ЧАСТЬ IV

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ, РЕШАЕМЫЕ МЕТОДАМИ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

XXII. ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЧЕТВЕРКА ТОЧЕК

777. Доказать, что прямая, соединяющая точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции с точкой пересечения ее диагоналей, делит оба основания трапеции пополам.

778. Даны прямая l и на ней три точки A, B и C так, что точка C делит отрезок AB пополам. Пользуясь одной линейкой, провести прямую, параллельную прямой l и проходящую через точку P не лежащую на l.

779. Даны две параллельные прямые и отрезок AB на одной из них. Применяя только линейку, разделить данный отрезок пополам.

780. Даны две параллельные прямые и точка, не лежащая на них. Через эту точку провести прямую, параллельную данным прямым, пользуясь одной линейкой.

781. Даны две параллельные прямые и на одной из них отрезок AB. Требуется удвоить отрезок AB, пользуясь одной линейкой.

782. Даны две параллельные прямые и отрезок AB на одной из них. Пользуясь одной линейкой, разделить данный отрезок на три равные части.

783. Даны две параллельные прямые и отрезок AB на одной из них. Пользуясь одной линейкой, разделить данный отрезок на n равных частей (где n — любое натуральное число).

784. Даны две точки A и B и прямая l, не проходящая ни через одну из них. Найти на прямой c такую точку S, чтобы c была биссектрисой угла между прямыми SA и SB.

785. Даны точка C и две прямые a и b. Провести через C такую прямую u, что из трех точек A, B, C, где A, B — точки пересечения u с a, b, одна была серединой отрезка между двумя другими.

786. Через каждую вершину треугольника ABC проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Доказать, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного проведенными шестью прямыми, пересекаются в одной точке.

XXIII. ТЕОРЕМА ДЕЗАРГА

787. Теорема Дезарга. Если у двух треугольников, лежащих в одной плоскости, точки пересечения соответствующих сторон лежат на одной прямой u, то прямые, соединяющие соответствующие вершины, проходят через одну точку.

788. Если у трех треугольников $A_iB_iC_i$ ($i = 1, 2, 3$) соответствующие вершины A_i, B_i и C_i лежат на трех прямых a, b, c, проходящих через одну точку S, то три соответствующие прямые Дезарга проходят через одну точку.

789. Даны две прямые a и a', которые пересекаются вне пределов чертежа. Пользуясь одной линейкой, через данную точку M, не лежащую на данных прямых, провести прямую, проходящую через точку пересечения прямых a и a'.

790. Даны две пары прямых a, a' и b, b' такие, что прямые каждой пары пересекаются вне пределов чертежа. Провести прямую, соединяющую точки пересечения прямых каждой пары.

791. При помощи одной линейки провести прямую через точку пересечения двух данных прямых, не попавшую в пределы чертежа, параллельно двум данным параллельным прямым.

792. Даны две пары прямых a, a' и b, b' такие, что прямые каждой пары пересекаются в точках A, B вне пределов чертежа. (Ни одна точка прямой AB не попала на чертеж.) Провести прямую через точку пересечения данной прямой c с прямой AB.

793. На плоскости α начерчен параллелограмм, точка P лежит на одной из сторон параллелограмма. Пользуясь одной линейкой, через точку P провести прямую, параллельную прямой c, лежащей в плоскости α.

794. На плоскости α начерчен параллелограмм. Дана прямая l и точка P вне этой прямой. Через точку P провести прямую, параллельную прямой l, пользуясь одной линейкой.

795. Дан треугольник ABC, у которого вершины B и C недоступны (т. е. не лежат в пределах чертежа). Пользуясь одной линейкой, построить медианы треугольника ABC в предположении, что на плоскости чертежа дан произвольный параллелограмм.

796. Дан треугольник и его средняя линия. Построить прямую, параллельную данной прямой при помощи одной линейки.

XXIV. ПРОЕКТИВНОЕ СООТВЕТСТВИЕ

797. Построить треугольник ABC, вершины которого лежат на трех данных прямых a, b, c, а стороны проходят через три данные точки L, M, N.

798. Теорема Паппа. Даны три точки A, B, C, лежащие на прямой u, и три точки A', B', C' — на прямой u', отличной от u. Доказать, что точки $K = BC' \times B'C$, $L = AC' \times A'C$, $M = AB' \times A'B$ лежат на одной прямой.

799. Построить треугольник, вписанный в данный круг, стороны которого проходят через три данные точки L, M, N

800. Построить треугольник, вписанный в данный круг, стороны которого параллельны трем данным прямым l, m, n.

801. Дана окружность. Построить треугольник, вписанный в окружность, две стороны которого проходят через две данные точки L, M, а третья параллельна данной прямой n.

802. В данную окружность вписать четырехугольник $ABCD$ так, чтобы его стороны AB и CD проходили соответственно через данные точки K и L, а стороны BC и AD пересекались в заданной точке M.

803. Около данной окружности описать треугольник, вершины которого лежат на трех данных прямых.

804. Около данной окружности описать четырехугольник $ABCD$ так, чтобы его вершины A и C лежали на данной прямой m, B — на данной прямой k, а D — на прямой l.

805. На плоскости начерчен квадрат $ABCD$ и даны точка P и прямая l. Применяя только линейку, через точку P провести прямую m, параллельную l, и прямую n, перпендикулярную l.

806. Если две окружности, построенные как на диаметрах на двух диагоналях полного четырехсторонника, пересекаются, то и третья окружность, построенная аналогично на третьей диагонали, проходит через точки их пересечения.

807. На плоскости α начерчены окужность и ее центр O, даны точка P и прямая l. Через точку P провести прямую, параллельную прямой l, пользуясь только линейкой.

808. В условии задачи 807 опустить из точки P перпендикуляр на прямую l.

809. На плоскости начерчена окружность вместе с ее центром. На той же плоскости даны отрезок AB и луч h, исходящий из точки A. Пользуясь только линейкой, отложить на луче h отрезок AD, равный отрезку AB.

XXV. КРИВАЯ 2-го ПОРЯДКА

810. Теорема Паскаля. Точки пересечения L, M, N противоположных сторон выпуклого шестиугольника, вписанного в окружность k, лежат на одной прямой p.

811. Две вершины A и B треугольника ABC лежат соответственно на двух данных прямых a и b; его стороны AB, BC, AC соответственно проходят через три данные точки L, M, N, не лежащие на одной прямой. Найти геометрическое место третьих вершин C.

812. Та же задача для точек L, M, N, лежащих на одной прямой.

813. Два постоянных угла вращаются вокруг своих вершин так, что точка пересечения двух из их сторон описывает прямую. Определить геометрическое место точек пересечения двух других сторон.

814. Два угла, постоянных по величине, вращаются вокруг своих вершин A и B так, что точка пересечения двух из их сторон описывает окружность, проходящую через точки A и B. Определить геометрическое место точек пересечений двух других сторон.

815. Основание AB треугольника ABC неподвижно, а вершина C перемещается по прямой l, не перпендикулярной данному основанию AB. Определить геометрическое место точек пересечения высот треугольника ABC.

816. Та же задача для прямой l, перпендикулярной основанию AB.

817. Дан четырехугольник $ABCD$. Сторона AD скользит по неподвижной прямой l так, что его длина не меняется, а противоположная сторона BC неподвижна. Определить геометрическое место точек пересечения диагоналей AC и BD.

818. Найти геометрическое место вершин C треугольников ABC, у которых сторона AB лежит на данной прямой l, имеет данную длину и данное направление, а стороны CA и CB проходят соответственно через данные точки R и Q. Обе точки R, Q не лежат на l, и прямая RQ не параллельна l.

819. Треугольник ABC описан около данной окружности, его сторона AB лежит на фиксированной касательной и имеет данную длину и данное направление. Найти геометрическое место вершин C.

820. На плоскости начерчена окружность без центра. Построить касательную к ней в произвольной ее точке M, пользуясь одной линейкой.

821. Через данную точку плоскости P, лежащую вне данной окружности, провести касательные к ней, пользуясь только линейкой.

822. Даны окружность без центра и параллелограмм. Пользуясь одной линейкой через данную точку P внутри окружности провести ее хорду, которая в данной точке разделилась бы пополам.

823. На плоскости начерчены окружность и параллелограмм. Пользуясь одной линейкой, построить центр окружности.

XXVI. ПУЧОК ПРЯМЫХ 2-го ПОРЯДКА

824. Теорема Брианшона. Прямые, соединяющие противоположные вершины шестисторонника, описанного около окружности, проходят через одну точку.

825. Угол постоянной величины вращается вокруг точки S, его стороны на окружности, проходящей через точку S, высекают две точки M и M'. Найти геометрическое место прямых MM'.

826. Угол заданной величины φ так движется в плоскости, что его вершина S описывает прямую l и одна его сторона вращается вокруг данной точки P. Что образуют вторые стороны угла?

827. Угол постоянной величины вращается вокруг своей вершины S, стороны его a и a' высекают соответственно на двух данных прямых u и u' две точки A и A'. Что образуют прямые AA'?

XXVII. СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

828. Даны 4 произвольные прямые. Сколько существует прямых, пересекающих их одновременно?

829. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых.

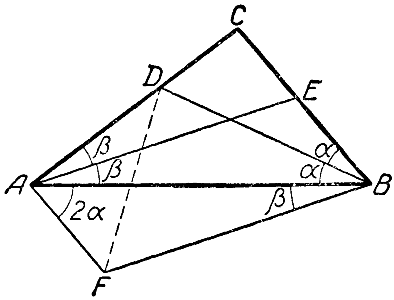
830. Дан неплоский простой шестиугольник, стороны которого касаются конуса 2-го порядка. Прямые, соединяющие противоположные вершины этого шестиугольника, пересекают одну прямую, проходящую через вершину конуса.

831. Найти геометрическое место перпендикуляров к плоскостям пучка, проведенным в точках пересечения этих плоскостей с произвольной прямой l.

832. Из точек прямой u на скрещивающуюся с ней прямую v опускаются перпендикуляры. Найти их геометрическое место.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

7. Провести индукцию, учитывая, что n точек разбивают прямую на $(n + 1)$ частей.



Черт. 2.

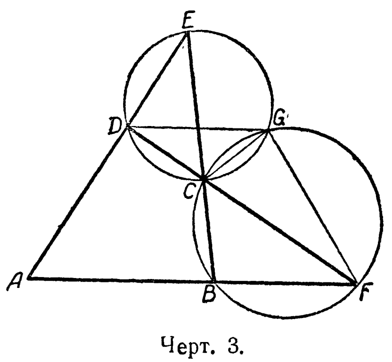
16. Построить $BF \parallel AE$ и $AF \parallel BC$ (черт. 2). Если допустить, что $\alpha > \beta$, то, сравнивая треугольники ADB и ABF, мы получим: $AD > AF$ Вместе с тем, рассматривая треугольник ADF и выражая его углы ADF и AFD через α и β, приходим к выводу: $\angle AFD < \angle ADF$. Следовательно, AD меньше AF. Таким образом, наше предположение, что $\alpha \neq \beta$, приводит к противоречию.

42. Рассмотреть треугольники, вершинами которых являются: одна — вершиной данного параллелограмма, две другие — центрами квадратов, построенных на сторонах параллелограмма, выходящих из этой вершины.

50. Рассмотреть три случая: 1) когда секущие не пересекаются внутри окружностей; 2) когда секущие пересекаются внутри одной из окружностей; 3) когда секущие пересекаются внутри каждой из двух данных окружностей.

63. Из центра окружности опустить перпендикуляр на бо́льшую из боковых сторон. Рассмотреть три случая: 1) когда угол при основании, прилежащий к меньшей из боковых сторон, меньше прямого; 2) больше прямого; 3) равен прямому.

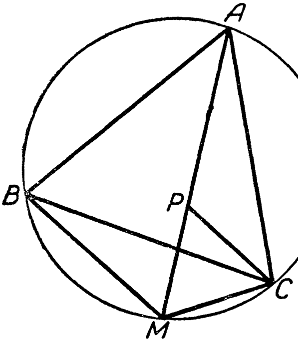
64. Пусть стороны AD и BC пересекаются в точке E, стороны AB и DC — в точке F (черт. 3). Окружности, описанные около треугольников DCE и BCF, пересекаются, помимо точки C, в точке G. Показать, что через эту точку проходят окружности, описанные около треугольников ADF и AEB Соединив точку G с точками D, C и F и рассматривая углы конфигурации, показать, что сумма углов DGF и DAB равна двум прямым.



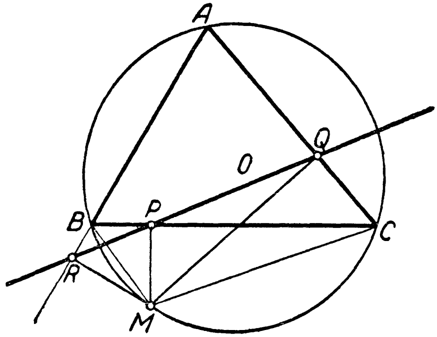
Черт. 3.

65. На отрезке, соединяющем точку дуги M с противолежащей вершиной A, отложим отрезок AP, равный отрезку MB (черт. 4). Рассмотреть треугольники APC и BMC

66. Допустим, что M — рассматриваемая точка окружности (черт. 5), P, Q и R—основания перпендикуляров, опущенных из этой точки соответственно на стороны BC, AC и AB треугольника. Пользуясь тем, что точки P и Q лежат на окружности с диаметром MC, а R и P — на окружности с диаметром BM, доказать, что $\angle BPR = \angle CPQ$.



Черт. 4.



Черт. 5.

67. Предварительно доказать, что расстояние центра описанной окружности от какой-либо стороны треугольника вдвое меньше расстояния ортоцентра от противолежащей вершины.

69. $|n_1 - n_2|$. 70. $a + b - c$. 71. $|B - C|$. 72. m. 73. $4b - a$. 74. $1 : 2$. 75. $\frac{3}{4}a$. 76. $s—c$. 77. $\frac{Rr}{R + r - 2\sqrt{Rr}}$. 78. 3:4:5. 79. $\frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{2p^2 - 4d^2}\right)$ — основания трапеции.

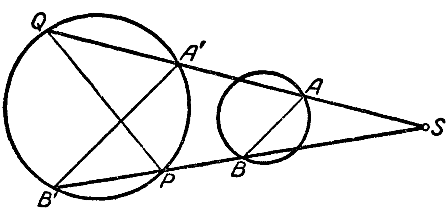
86. Воспользоваться решением задачи 57, кроме того, построить окружности, симметричные данной относительно сторон треугольника AB, BC и CA.

93. Задача может быть решена двояко: исходя из рассмотрения подобных треугольников или на основе сложения двух центрально-подобных преобразований.

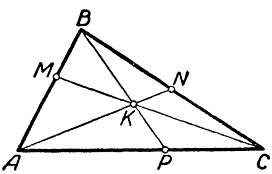
94. Применить теорему Менелая

96. Пусть S — центр подобия данных окружностей, а SQ и SB' — произвольные секущие (черт. 6). $\triangle ABS \sim \triangle QPS$; отсюда следует, что $SB \cdot SP = \text{const}$.

97. Записать по теореме Менелая (см. задачу 93) соотношение между отрезками сначала для $\triangle ABP$, затем для $\triangle BPC$ (черт. 7).



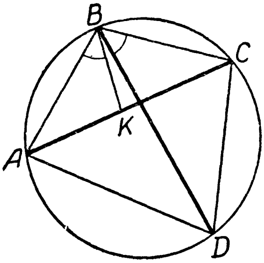
Черт. 6.



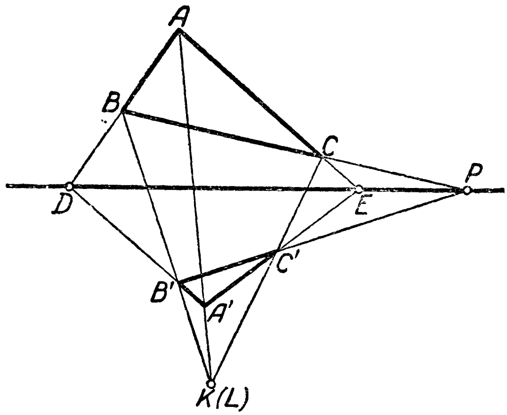
Черт. 7.

99. При точке B строится угол ABK, равный углу DBC, и рассматриваются последовательно две пары подобных треугольников (черт. 8).

100. Применив теорему Менелая к треугольникам DAE и $DA'E$, получаем: $\frac{DB}{AB} : \frac{DB'}{B'A'} = \frac{EC}{AC} : \frac{C'E}{C'A'}$ (черт. 9).



Черт. 8.



Черт. 9.

Точно так же, используя теорему Менелая для треугольников ADA' и AEA', получаем соотношения: $AK : A'K = \frac{AB}{DB} : \frac{B'A'}{CB'}$; $AL : A'L = \frac{AC}{EC} : \frac{C'A'}{C'E}$. Отсюда следует, что точки K и L совпадают.

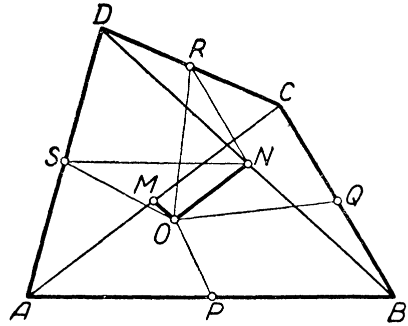
101. $\frac{b(\sqrt{5}-1)}{2}$. **102.** $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Рассмотреть четырехугольник и применить к нему теорему Птолемея

103. c; $2c$; b; $2b$; a; $2a$. **104.** $\frac{r^2}{R}$. **105.** $\frac{am}{m+1}$. **106.** $EF = \frac{a+mb}{1+m}$.

107. $\frac{q+p+r}{3}$. Воспользоваться предыдущей задачей. **108.** $x = \frac{2ab}{a+b}$.

109. $a : b$. Рассматривается четырехугольник, около которого можно описать окружность. **110.** 60°. **111.** Гипотенуза треугольника равна $2\sqrt{ab}$, а катеты $2a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ и $2b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$. **112.** Гипотенуза $2\sqrt{Rr}$; один из катетов $2r\sqrt{\frac{R}{R+r}}$. **113.** $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **114.** При решении задачи рассмотреть два треугольника и в каждом выразить квадрат стороны по формуле обобщенной теоремы Пифагора. **115.** $m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2+c^2) - \frac{1}{4}a^2$. **116.** $b_a^2 = bc - BP \cdot PC = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$, где P — точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC. **117.** $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

118. $a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2}$; $b = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2+m_c^2)-m_b^2}$;
$c = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2+m_b^2)-m_c^2}$.



Черт. 10.

124. Пусть S, R, Q и P — середины сторон данного четырехугольника, M и N — середины диагоналей, а O — точка пересечения прямых, проходящих через M и N и соответственно параллельных диагоналям (черт. 10). Четырехугольник $SDRO$ равновелик четырехугольнику $SDRN$, площадь которого равна $\frac{1}{4}$ части площади данного четырехугольника.

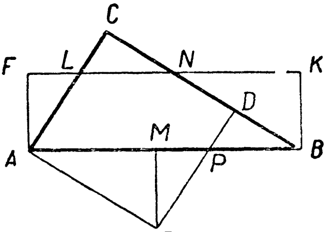
125. $\sqrt{2}-1$. 126. $\sqrt{pq}$. 133. $m^2 : mn : n^2 : mn$. 135. Воспользоваться чертежом 11. 136. Воспользоваться чертежом 12. $\triangle CFK = \triangle ACH$, $\triangle LNB = \triangle ACH$.

137. Пусть AM, AK, AN — соответственно медиана, биссектриса и симедиана треугольника. Выразим двумя способами отношение площадей треугольников BAN и MAC, а также площадей треугольников BAM и NAC и перемножим почленно полученные равенства.

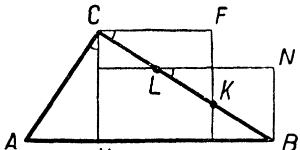
138. При решении задачи воспользоваться отношением площадей образованных треугольников. 141. 0,15%. 142. $R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. 143. $\frac{\pi R^2}{3}$.

144. $a^2(\pi-2)$. 145. $\frac{a^3}{18}(3\sqrt{3}-\pi)$. 146. $\frac{\pi R^2}{30}$. 147. $3R^2(7-4\sqrt{3})\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$.

148. $\frac{\pi R_1 R_2 R_3}{R_1+R_2+R_3}$.



Черт. 11.



Черт. 12.

176. Рассмотреть два случая: а) данные отрезки лежат на пересекающихся прямых; б) данные отрезки AB и $A'B'$ лежат на скрещивающихся прямых. Во втором случае через скрещивающиеся прямые AA' и BB' проведем параллельные плоскости α и β. В каждой из этих плоскостей через середины отрезков AA' и BB' проведем перпендикуляры a и b Искомой осью является прямая, перпендикулярная прямым a и b и их пересекающая.

178. Рассмотреть сечение куба по одной из диагональных плоскостей.

183. Провести вспомогательное сечение через одно из данных ребер и середину противоположного ребра. **196.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **197.** $\frac{m^2\sqrt{3}}{6}$. **198.** $6:1$. **199.** $\frac{\sqrt{6}}{2}a$. **200.** $\frac{a}{3}$. **201.** $\frac{\pi}{2}$. **202.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **203.** $\frac{abc}{6}$. **204.** $\frac{5}{6}a^3$. **205.** $H = \frac{ab}{a+b}$. **206.** $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$. **207.** $\varphi = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **208.** $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha\cos\frac{\pi}{n}$.

209. $V_{SABC} = V_0 SA \cdot SB \cdot SC$. **210.** $\frac{h\sqrt{2}}{2}$. **211.** $\sqrt[3]{\frac{1}{4}(a^3+b^3)^2}$.

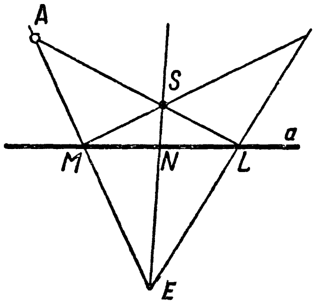
212. $\frac{l}{2}\sqrt[4]{(m^2+n^2+p^2)(m^2+n^2-p^2)(m^2+p^2-n^2)(n^2+p^2-m^2)}$.

213. $V_1 : V_2 : V_3 = 1:7:19$. **214.** $2\sqrt{2}-1$. **215.** $\frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$. **216.** $\frac{4}{9}S$.

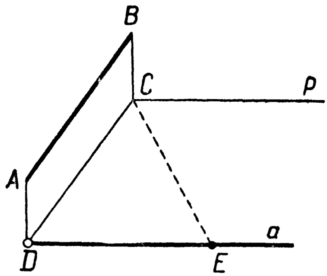
217. $\frac{21}{125}$. **218.** $\frac{7}{16}S$. **219.** $\frac{S}{2}$. **220.** $\frac{5}{4}S$. **221.** $\frac{7}{8}S$. **222.** $\frac{a}{2} \pm p\sqrt{2}$; $2a$; $\frac{1}{4}(a^2-8p^2)$. **223.** $\frac{abc}{ab+ac+bc}$. **225.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **228.** $\pi ab\sin\alpha\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$.

230. $\frac{\pi}{4}$. **233.** $R = \frac{65}{4}$. **234.** $\frac{h}{2\sin\alpha}\cdot\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **235.** $\frac{2}{3}\pi h^3$. **236.** $2:1$. **237.** $\frac{1}{3}R\sqrt{6}$.

238. $\frac{4\pi R^2 r^2}{2(R+r)}$. **239.** $\frac{1}{2}\pi R^3\sqrt{3}$. **240.** $1:7:19$. **241.** $V = \frac{\sqrt{6}}{4}r^3$. **242.** 27. **243.** 9.



Черт. 13.



Черт. 14.

247. На прямой a построить точки M, N, L так, чтобы N была серединой отрезка ML (черт. 13). Пусть S — точка пересечения прямых EN и AL, где E — произвольная точка на AM. Точка пересечения прямых EL и MS лежит на искомой прямой.

248. Строим параллелограмм $ABCD$ (черт. 14); проводим $CP \parallel a$. Далее строим биссектрису CE угла DCP (см. зад. 245, *б*) Прямая CE определит точку E, удовлетворяющую условию: $DE = AB$.

253. Пусть $\triangle EKC$ искомый (черт. 15). Построить $\triangle KEN$, равный $\triangle ECM$ и доказать, что $\angle AEN = 30°$.

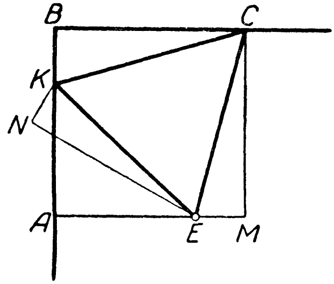
268. Отложим на стороне BA от B отрезок $BD + DK$, равный данному отрезку l. Через точки D и K проведем прямые, параллельные AC, которые пересекут BC в точках F и L. KF является биссектрисой угла BKL (черт. 16)

270. Если O — центр данной окружности, то BO параллельна высоте, проходящей через точку H, и делит основание треугольника пополам.

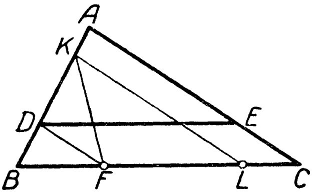
280. Пусть $O_1(r_1)$ и $O_2(r_2)$ — данные окружности, A — данная точка на окружности $O_1(r_1)$. Построим радиус O_2B, параллельный O_1A. Точка касания искомой окружности с окружностью $O_2(r_2)$ лежит на прямой AB.

288. Из искомой точки отрезок линии центров OO' виден под углом $180° - \frac{\alpha}{2}$.

290. Пусть L — точка на отрезке XM, для которой $XL = XN$. Из точки L отрезок MN виден под углом, который можно рассчитать.



Черт. 15.



Черт. 16.

299. По данному углу A можно построить хорду BC. Далее, если O — центр вписанной окружности, то

$$\angle BOC = 2d - \frac{1}{2}(B + C) = d + \frac{1}{2}A.$$

303. Рассмотреть два случая: 1) данные точки лежат соответственно на сторонах данного угла α; 2) одна из данных точек лежит на стороне угла α, а другая — на стороне треугольника, противолежащей углу α. При решении задачи во втором случае провести из какой-либо данной точки касательную к окружности, концентрической данной, с радиусом OD, где D — середина хорды, определяемой углом α.

306. Если M — точка пересечения искомых секущих, то MO есть биссектриса угла AMB.

311. Центр искомой окружности совпадает с центром окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$.

315. Построить сначала треугольник, а затем параллелограмм, равновеликие данному четырехугольнику.

329. Пусть O — центр данной окружности, A и B — данные точки. Центр O_1 искомой окружности принадлежит геометрическому месту точек, сумма квадратов расстояний которых от точек O и A есть величина постоянная.

336. Точка O принадлежит геометрическому месту точек, разность квадратов расстояний которых от B и C есть величина постоянная.

352. Перенести отрезок BF на вектор $\overline{FE}$.

353. Малую окружность параллельно перенести так, чтобы ее хорда совпала с равной ей хордой большей окружности.

365. Использовать геометрическое место точек, отрезки касательных из которых к данной окружности имеют данную длину.

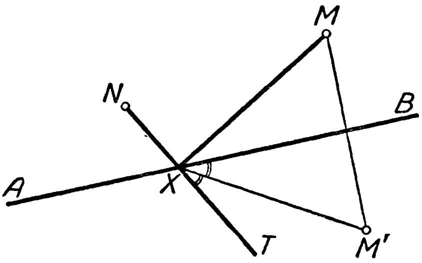
366. Построить точку A', симметричную точке A относительно J. Затем на $A'B$ построить дугу сегмента, вмещающего угол $A'FB$. Этот угол легко определить из условий задачи.

367. Взять на данных окружностях по точке M и N так, чтобы отрезок MN равнялся отрезку a. Далее построить геометрическое место точек, из которых отрезок MN виден под углом α.

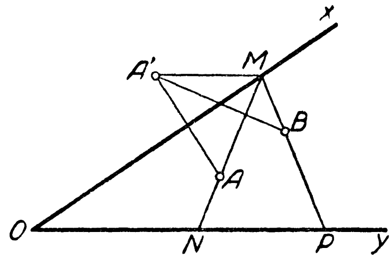
374. Рассмотрим более сложный случай, когда точки M и N лежат по одну сторону от данной прямой (черт. 17); M' — точка, симметричная M относительно AB. Тогда XM' есть биссектриса угла BXT, где T — точка, лежащая на прямой NX в той же полуплоскости, что и точка M'.

376. Пусть XOY — данный угол (черт. 18). Построим точку A', симметричную A относительно OX, и выразим угол $A'MB$ через данный угол XOY.

379. Рассмотреть $\triangle A'CB$, симметричный $\triangle ABC$ относительно оси, перпендикулярной к стороне BC и проходящей через ее середину. Угол ACA' равен $\angle B - \angle C$ (черт. 19).



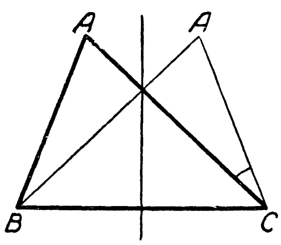
Черт. 17.



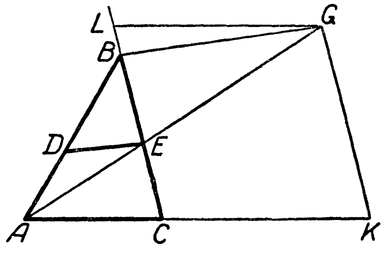
Черт. 18.

400. Имея отношение трех радиусов данных окружностей, задачу можно решить с помощью построения двух окружностей Аполлония.

402. Данная и искомая окружности центрально-подобны с центром подобия в точке касания. B. Вершине данного угла А соответствует в этой гомо-



Черт. 19.



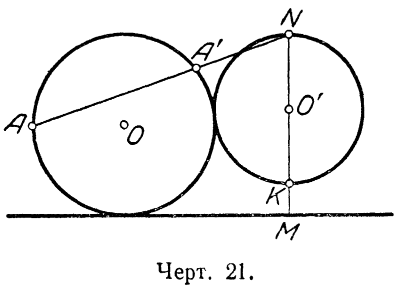
Черт. 20.

тетии точка пересечения A' касательных данной окружности, соответственно параллельных сторонам данного угла.

403. Построить фигуру $ABGK$, центрально-подобную $ADEC$ относительно центра подобия A. После этого легко определить в треугольнике ABC точку E (черт. 20).

404. Свести задачу к предыдущей.

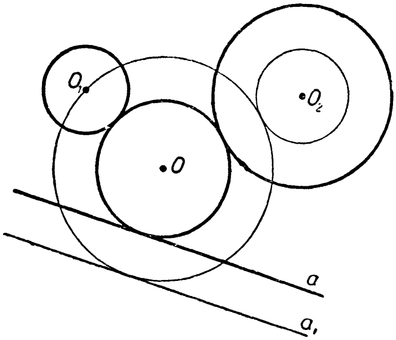
406. Перпендикуляр, опущенный из центра O' (черт. 21) данной окружности на прямую, пересекает окружность и прямую соответственно в точках K и M; N — другая точка пересечения окружности с этим перпендикуляром. Точка искомой окружности A' может быть определена как точка пересечения окружности, проходящей через точки A, K, M с прямой NA.



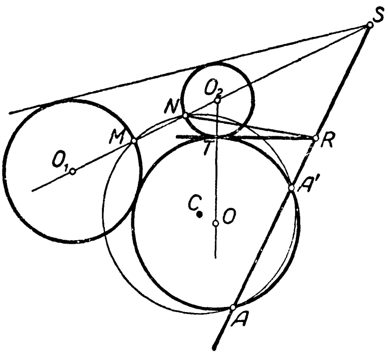
Черт. 21.

407. Окружность, концентрическая с искомой, имеющая радиус, равный сумме радиусов искомой и меньшей из данных окружностей, может быть построена (см. задачу 406). Все ли решения таким образом будут учтены? (Черт. 22).

408. Через центр подобия данных окружностей проводится прямая, проходящая через данную точку A, A' — вторая точка пересечения этой прямой с искомой окружностью. Пусть M и N — антигомотетичные точки линии центров данных окружностей. Точки A, A', M и N принадлежат некоторой вспомогательной окружности. Зная радикальный центр одной из данных, искомой и вспомогательной окружностей, можно построить центр искомой окружности (черт. 23).

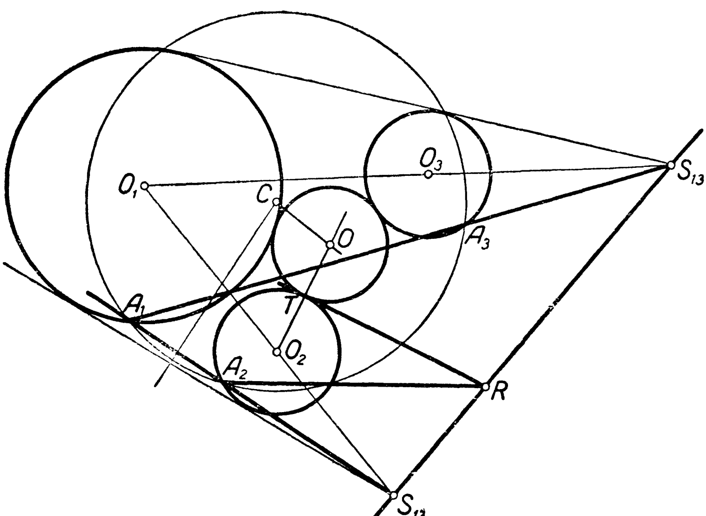


Черт. 22.



Черт. 23.

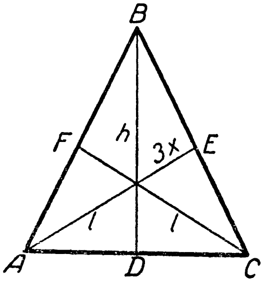
409. Ось подобия трех данных окружностей $S_{12}S_{13}$ является радикальной осью искомой окружности и некоторой вспомогательной окружности C, проходящей через три точки, попарно антигомотетичные относительно соответствующих центров подобия. С помощью радикального центра R искомой, вспомогательной и одной из данных окружностей можно построить центр искомой



Черт. 24.

окружности (черт. 24). **423.** Одну из данных точек принять за полюс инверсии. **424.** См. указание к задаче 423. **426.** См. указание к задаче 423.

450. Пусть требуется построить равнобедренный треугольник ABC, в котором высота $BD = h$, биссектрисы AE и CF равны l, а угол $BAC = 2x$ (черт. 25). Используя теорему синусов, получаем:



Черт. 25.

$$\frac{l}{\sin(180° - 4x)} = \frac{h}{\sin 2x \cdot \sin 3x},$$

откуда

$$h = \frac{l \sin 2x \cdot \sin 3x}{\sin 4x}.$$

Если $l = 4h$, то предыдущее соотношение принимает вид:
$\cos 2x = 2 \sin 3x$. После преобразования имеем:

$$8 \sin^3 x - 2\sin^2 x - 6 \sin x + 1 = 0.$$

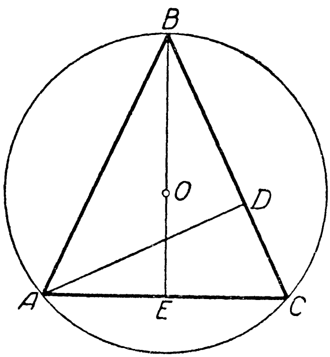
451. Если точка X находится от данной точки и от данной прямой на расстояниях, сохраняющих постоянное отношение, то она лежит на коническом сечении.

452. Пусть в искомом треугольнике ABC $AB = BC$; BE и AD — высоты треугольника. Из треугольников ADC и ABE, пользуясь тригонометрическими соотношениями, получаем (черт. 26):

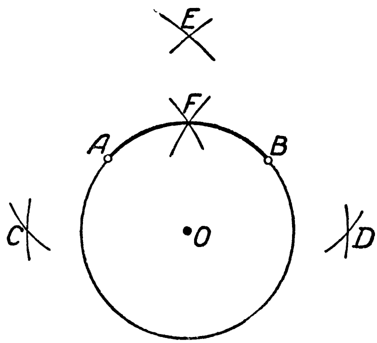
$$4R \cos^3 \alpha - 2R \cos \alpha - a = 0$$

($\alpha = \angle ABE$, $a = AD$, R — радиус данной окружности).

454. Пусть $O(r)$ — данная окружность. Строим окружности $A(r)$ и $B(r)$. Пусть, далее, окружность $O(AB)$ пересекает окружности $A(r)$ и $B(r)$ соответственно в точках C и D. Построим окружности $C(CB)$ и $D(AD)$ и обозначим через E одну из их точек пересечения. Точка F пересечения окружностей $C(OE)$ и $D(OE)$ искомая (черт. 27).



Черт. 26.



Черт. 27.

457. Для решения задачи применить метод инверсии.

458. См. указание к задаче 457

492. Искомая точка M должна лежать в плоскости α на окружности Аполлония.

499. Построить соответствующее геометрическое место точек в одной из плоскостей, проходящих через две данные точки.

504. Воспользоваться определением угла между скрещивающимися прямыми.

505. Рассмотреть плоскость, проходящую через данную точку и перпендикулярную к ребру двугранного угла, образованного данными плоскостями.

510. Воспользоваться геометрическим местом точек задачи 500.

511. Воспользоваться геометрическим местом точек задачи 492.

514. Использовать геометрическое место точек задачи 488.

526. Использовать геометрическое место середин всех отрезков, концы которых лежат на двух данных скрещивающихся прямых.

538. Использовать геометрическое место прямых задачи 505. **553.** 0,75.

554. Если S — точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1, то
$\frac{BS}{SB_1} = \frac{\mu + 1}{\lambda}$; $\frac{CS}{SC_1} = \frac{\lambda + 1}{\mu}$. **557.** $EF : FD = 1 : n$. **558.** $\cos\varphi = \frac{4}{5}$.

560. Введя в треугольнике ABC обозначения: $\overline{AB} = \boldsymbol{c}$, $\overline{AC} = \boldsymbol{b}$, $\overline{BC} = \boldsymbol{a}$, использовать скалярное произведение векторов.

562. $AC_1 : C_1B = b^2 : a^2$; $CC_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

566. $\overline{CC_1} = \frac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|}$; $CC_1 = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a + b}$. **567.** Ввести векторы $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$; $\overline{AD} = \boldsymbol{b}$; $\overline{AK} = \alpha\boldsymbol{a}$; $\overline{AN} = \beta\boldsymbol{b}$, где K и N — вершины прямоугольника, лежащие на сторонах AB и AD. Из условия равенства противоположных сторон прямоугольника и из условия перпендикулярности смежных его сторон получим: $(\beta - \alpha)(1 - \alpha - \beta) = 0$. **570.** Принять две стороны треугольника за координатные векторы аффинной системы координат. **571.** См. указание к задаче 570. **572.** За начало координат принять точку пересечения O боковых сторон трапеции AD и BC, а за координатные векторы — векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$; затем найти радиус-вектор точки пересечения диагоналей трапеции. **574.** За оси координат принять катеты треугольника ABC $\cdot$ $\frac{1}{2}$; -4.

575. За оси координат принять сторону CD и перпендикуляр AA_1.

$$BM : MD = 1 + 2\cos 72^\circ = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1),$$

где M — точка пересечения перпендикуляра с диагональю.

576. За координатные векторы аффинной системы координат принять две стороны треугольника, исходящие из одной вершины; найти координаты точек M, N, P по формулам деления отрезка в данном отношении, положив $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \lambda$; $\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} = \mu$; $\frac{\overline{CP}}{\overline{AP}} = \nu$, и воспользоваться условием коллинеарности точек. **577.** См. указание к предыдущей задаче.

578. Взяв точку пересечения диагоналей четырехугольника за полюс, выразить векторы сторон через радиусы-векторы вершин.

580. Использовать тождества:

$$[\boldsymbol{ab}]^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{ab})^2 \text{ и } 2\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2.$$

Тогда
$16S^2 = (a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$.

581. Принять точку O за начало координат и положить $\overline{OA} = \boldsymbol{r}_1$, $\overline{OD} = \boldsymbol{r}_2$; тогда $\overline{OB} = \alpha\boldsymbol{r}_1$ и $\overline{OC} = \beta\boldsymbol{r}_2$.

582. Принять точку O за начало координат и положить

$$\overline{OA} = \boldsymbol{r}_1,\ \overline{OB} = \boldsymbol{r}_2,\ \overline{OC} = \boldsymbol{r}_3.$$

583. $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2+4c^2}}{2}$. Одну из параллельных плоскостей принять за плоскость XOY, перпендикуляр — за ось OZ

584. За координатные векторы аффинной системы координат принять три вектора — ребра тетраэдра, исходящие из одной точки.

585. Каждый из отрезков делится точкой G в отношении $\lambda = 3$ (считая от вершины тетраэдра). См. указание к задаче 584.

586. Используя то обстоятельство, что векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$ некомпланарны, доказать, что $\overline{A_1A_2} = \overline{A_5A_4}$; $\overline{A_2A_3} = \overline{A_6A_5}$; $\overline{A_3A_4} = \overline{A_1A_6}$.

587. $A_1A_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+b'^2+c'^2-a^2-a'^2}$. Выразить векторы $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ и $\overline{AB}$ через векторы $\overline{SA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{SB} = \boldsymbol{b}$; $\overline{SC} = \boldsymbol{c}$.

588. Доказать равенство: $\overline{BC}\cdot\overline{AD} + \overline{CA}\cdot\overline{BD} + \overline{AB}\cdot\overline{CD} = 0$, для чего выразить левую часть через радиусы-векторы точек A, B, C, D.

589. См. указание к задаче 588. **591.** $\cos\varphi = \dfrac{b^2+b'^2-c^2-c'^2}{2aa'}$.

592. 45°.

593. $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **594.** $\varphi = 60°$. **595.** $\cos A = \operatorname{ctg}\beta \times \operatorname{ctg}\gamma$; $\cos B = \operatorname{ctg}\gamma\cdot\operatorname{ctg}\alpha$; $\cos C = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$. **596.** $\cos\varphi = \dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

597. $\cos\gamma = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\sqrt{1+4\cos^2\alpha}}$. За оси координат принять диагонали основания пирамиды и ее высоту.

599. Чтобы высоты AA_1 и BB_1 пересекались, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overline{AB}$, $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$ были компланарны: $(\overline{AB}, \overline{AA_1}, \overline{BB_1}) = 0$, что приведет к равенству $\overline{b}\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{c}$, где $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — соответственно векторы $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ (принять во внимание, что $\overline{AA_1} \parallel (\overline{b}\times\overline{c})$). Отсюда находим: $CA^2 + SB^2 = BC^2 + SA^2$.

600. $4S^2 = a^2b^2\sin^2\gamma + b^2c^2\sin^2\alpha + c^2a^2\sin^2\beta + 2ab^2c(\cos\gamma\cdot\cos\alpha - \cos\beta) + 2a^2bc(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha) + 2abc^2(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \cos\gamma)$.

Выразить площадь треугольника ABC через векторы $\overline{SA} = \overline{a}$, $\overline{SB} = \overline{b}$ и $\overline{SC} = \overline{c}$; затем вычислить $4S^2$, воспользовавшись формулой скалярного умножения двух векторных произведений.

602. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

604. Каждое из тех тел, на которые плоскость разбивает тетраэдр, представляет собой сумму двух пирамид: одна из них четырехугольная, другая треугольная.

605. Прямая. Ввести аффинную систему координат, принимая вектор $\overline{AB}$ за координатный вектор e_1. **606.** Две прямые. **607.** $y = \mu\lambda x$. Прямые l и m принять соответственно за оси OX и OY.

608. Прямая, проходящая через вершину угла. Принять стороны угла за оси аффинной системы координат.

609. $OM = \dfrac{10}{3}$. Центр окружности принять за начало координат, а ось Ox провести через точку A.

610. Прямая, перпендикулярная к прямой AB.

611. Если начало координат находится в вершине угла, а ось Ox перпендикулярна к прямой l, то уравнение искомого геометрического места есть $x\cos\varphi + y\sin\varphi - \lambda a = 0$, где a — расстояние прямой l от вершины угла.

612. Принять за оси аффинной системы координат стороны AB и AC треугольника

613. Одно из оснований принять за ось Ox.

614. Отрезки прямых $y = \pm \frac{b}{a} x$, где a и b — катеты треугольника ABC. Принять данные взаимно перпендикулярные прямые за оси координат.

615. Два отрезка длиной $2r\sqrt{2}$, параллельные биссектрисам угла между прямыми l и m и середины которых совпадают с точкой O. Взять оси координат, параллельные данным прямым l и m; начало координат поместить в точке O

616. Прямая, перпендикулярная к прямой AB.

617. M (1, 6; 0). За оси прямоугольной декартовой системы координат принять прямую CD и перпендикуляр к ней, опущенный из точки A.

618. Принять за оси аффинной системы координат диагонали четырехугольника. 619. $CD = 13$. 620. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2(a+b)h}{h^2-(a+b)^2}$. 621. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2ab \sin \alpha}{a^2-b^2}$.

622. $a = \frac{10}{3}$. За ось Ox принять основание треугольника, за ось Oy — высоту, опущенную на основание.

623. Прямая, проходящая через точку O. За ось Ox принять прямую a.

624. Общий перпендикуляр находится от точки A на расстоянии, равном $6+2\sqrt{14}$ За ось Ox принять одну из параллельных прямых, за ось Oy — перпендикуляр к оси Ox, проходящий через заданную точку.

625. $AC = \frac{25}{4}$; $BC = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{41}$. Сторону AB принять за ось Ox, ось Oy провести через точку H.

626. Принять за оси координат одну из сторон и высоту, опущенную на эту сторону.

627. Принять за оси координат одну из сторон и перпендикуляр к ней, восставленный из ее середины.

628. Оси координат выбрать, как в задаче 626. Обозначив через X_G, X_H, X_S абсциссы точек G, H и S, доказать, что $X_G = \frac{X_H + 2X_S}{3}$; аналогично поступить и для ординат.

629. См. указание к задаче 626.

630. $S = \frac{2c^3(a^2-2c^2)\sqrt{a^2-c^2}}{a^4}$.

632. Две прямые, проходящие через точку пересечения данных прямых. За ось Ox взять биссектрису угла между двумя пересекающимися прямыми, за начало координат — точку их пересечения

633. $d = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 634. $d = \frac{14}{\sqrt{29}}$.

635. $x + 3y - 8 = 0$. За начало координат принять точку A, ось Ox направить по стороне AB угла.

636. Выбрать систему координат, как в задаче 626. Сумма равна высоте треугольника. 637. Выбрать систему координат, как в задаче 626. Расстояние d от точки M до стороны треугольника считать положительным, если точка M лежит по ту же сторону от нее, как и противоположная вершина, и отрицательным — в противном случае. 638. Выбрать систему координат, как в задаче 626. 639. Окружность. 640. Окружность. 641. Окружность, касающаяся данной окружности в точке A и имеющая радиус $R = \frac{\lambda r}{1+\lambda}$.

642. Искомое геометрическое место — дуги двух окружностей: $(x-r)^2+(y-r)^2=2r^2$, $(x-r)^2+(y+r)^2=2r^2$. За начало координат принять точку A и ось Ox провести через точку B, использовать полярные координаты.

643. Окружность при $\lambda \neq 1$; при $\lambda = 1$ прямая, называемая радикальной осью.

644. Прямая, параллельная радикальной оси данных окружностей. См. ответ к задаче 643.

645. Принять за оси координат одну из данных прямых и перпендикуляр к ней.

646. Если полюс инверсии принять за начало координат, то формулы преобразования инверсии на плоскости будут:

$$x=\frac{k^2x'}{x'^2+y'^2}, \quad y=\frac{k^2y'}{x'^2+y'^2}.$$

Применяя эти формулы, получим основные свойства инверсии.

648. Эллипс с полуосями $p-c$ и $\sqrt{p^2-2pc}$, в частности с полуосями 13 и 5. **649.** $\frac{24\sqrt{3}}{7}$ и $\frac{48\sqrt{3}}{13}$. **650.** $2p=\frac{2b^2}{a}$. **651.** $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

652. Если за оси координат принять оси эллипса, то искомые касательные имеют уравнения: $\pm 3x \pm 4y + 15 = 0$ **654.** $A_1B_1 \cdot A_2B_2 = b^2$.

657. $x^2+y^2=a^2+b^2$ (окружность). За оси координат принять оси эллипса. Обозначив через x_0, y_0 координаты точки M искомого геометрического места, найти условие, которому должен удовлетворять угловой коэффициент прямой, проходящей через точку M, для того чтобы эта прямая касалась эллипса.

658. Если оси координат совпадают с осями эллипса, то уравнение геометрического места точек есть прямая — диаметр: $y=-\frac{b^2}{a^2k}x$, где a и b — полуоси эллипса, k — угловой коэффициент хорд.

661. $\sqrt{2(a^2+b^2)}$. См. задачу 660. Вершины квадрата лежат на осях эллипса, стороны квадрата отсекают на осях равные отрезки. **662.** Эллипс с осями $\frac{2}{3}a$ и $\frac{2}{3}b$. **663.** Эллипс. **665.** Эллипс. **666.** Эллипс с осями a, b и с центром в середине малой полуоси. **667.** Эллипс, фокусами которого служат центр O и точка A. **670.** $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

671. Если оси гиперболы приняты за оси координат, то искомые точки имеют координаты: $\left(\pm\frac{a(1+\lambda)}{2\sqrt{\lambda}};\ \pm\frac{b(1-\lambda)}{2\sqrt{\lambda}}\right)$.

672. Если за оси координат принять оси гиперболы, а выбранный фокус лежит на положительной полуоси, то искомые касательные имеют уравнения: $8x \pm \sqrt{11}\,y - 20 = 0$.

673. b^2. **676.** Если за оси координат приняты оси гиперболы, то уравнение геометрического места: $x^2+y^2=a^2-b^2$, где $a > b$ (окружность). См. указание к задаче 657. **678.** Гипербола. **680.** b. **681.** Директриса, соответствующая тому фокусу, из которого проведены перпендикуляры. **682.** Гипербола.

683. $(1+\lambda)^2xy=2\lambda S$ (гипербола, асимптоты которой совпадают с осями координат). Принять взаимно перпендикулярные прямые за оси координат.

684. Гипербола с осями a, b и центром в середине отрезка OA, где O — центр данной гиперболы и A — выбранная вершина.

685. Гипербола с осями a, b и с центром в середине отрезка OF, где O — центр данной гиперболы и F — выбранный фокус.

686. $b > a$. Доказать, что стороны любого прямоугольника, вписанного в гиперболу, параллельны ее осям, и найти координаты вершин вписанного квадрата.

687. $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ (равносторонняя гипербола). За оси координат принять данные две перпендикулярные прямые.

688. Гипербола; центр заданной окружности и данная точка — фокусы гиперболы

689. $x^2 - y^2 = a^2$ (равносторонняя гипербола). Принять середину отрезка $AB = 2a$ за начало координат, ось Ox направить по прямой AB. Найти уравнение, связывающее угловые коэффициенты лучей, и выразить их через координаты точки геометрического места.

690. Гипербола, центр которой совпадает с центром пучка, а асимптоты параллельны прямым l и m

691. $4\sqrt{3}p$. 692. $2p$. 693. $2p\sqrt{5}$; $\frac{3}{2}p\sqrt{5}$; $\frac{3}{2}p\sqrt{5}$.

697. Директриса параболы. 701. Парабола с вершиной в фокусе данной параболы и с параметром, вдвое меньшим. 702. Прямая, параллельная оси параболы, называемая диаметром

703. Парабола. За ось Ox принять прямую, проходящую через вершину прямого угла перпендикулярно к заданной прямой l.

704. Если за ось Oy принять катет a и за начало координат — вершину B, то уравнение геометрического места точек будет: $y^2 = \frac{a^2}{b}x$ (парабола).

705. Точка отстоит от вершины на расстоянии, равном $2p$. 706. $y^2 \pm 2rx - r^2 = 0$ (две параболы). За начало координат принять центр данной окружности, а за ось ординат — прямую l. 707. Приняв за оси координат оси парабол, найти их уравнения и сложить.

708. $\frac{FA \cdot FB}{AB} = \frac{p}{2}$, где p — параметр параболы. 709. Прямая, перпендикулярная к плоскости треугольника. 711. $a = 3$. 712. $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$. 713. Трапеция с периметром $\frac{a}{2}(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})$. 714. Принять одну из вершин тетраэдра за начало координат, воспользоваться векторными уравнениями искомых плоскостей и показать, что три из них являются следствиями трех остальных уравнений. 715. См. указание к задаче 714. 717. Правильный треугольник при $h\sqrt{3} \leqslant a$ и $h\sqrt{3} \geqslant 2a$; шестиугольник при $a < h\sqrt{3} < 2a$.

718. $\cos\varphi = \frac{1 - 3\cos^2\beta}{\sqrt{2(1+\cos^2\beta)}}$. 719. $\cos\varphi = \frac{3h^2 - 2a^2}{\sqrt{3h^2+4a^2}\sqrt{12h^2+a^2}}$.

720. $S = \frac{4}{9}\sqrt{3}a^2$. 721. $\cos\varphi = \frac{ah}{\sqrt{b^2+h^2}\sqrt{a^2+c^2}}$. 722. $d = a$.

724. Воспользоваться векторными уравнениями прямых в форме $\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda\bar{e}$. Плоскость, параллельная данным прямым.

725. $\sin\varphi = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$. 726. $\sin\varphi = \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{1+9\cos^2\beta}}$.

727. $\sin\varphi = \frac{a(b-c)}{\sqrt{a^2+b^2+h^2}\sqrt{a^2+c^2}}$.

728. $\cos\varphi = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}$; при $\beta = \alpha = 60°$ угол $\varphi = 45°$.

729. Свести задачу к проведению прямой, проходящей через заданную точку и пересекающей две данные прямые.

730. Задача не имеет решения, если две плоскости, проведенные через каждую прямую l_1 или l_2 параллельно прямой l_0, параллельны

731. $\frac{\sqrt{6}}{3}a$. 732. $\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+4a^2b^2}}$.

733. $\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2$; $d = \frac{d_2\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - d_1\sin\alpha_1\cos\alpha_2}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_1\cdot\cos^2\alpha_2}}$.

За оси координат принять третью прямую и оба общих перпендикуляра. Какие знаки следует придать числам d_1, d_2 и d и как отсчитывать углы α_1, α_2 для того, чтобы последняя формула была справедливой?

734. $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{5a^2+h^2}}$; $d = \dfrac{ah}{\sqrt{4a^2+h^2}}$; $\dfrac{a(2a^2+h^2)}{4a^2+h^2}$.

За оси координат принять диагонали основания пирамиды и ее высоту.

735. $d = \dfrac{a}{\sqrt{9a^2+2h^2}}$; $\lambda_1 = \dfrac{3a^2}{2(3a^2+h^2)}$; $\lambda_2 = \dfrac{12a^2}{2h^2-3a^2}$.

736. $\cos\varphi = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7a^2+3h^2}}$; $d = \dfrac{9ah}{2\sqrt{25a^2+21h^2}}$. **737.** Сфера.

738. Окружность в плоскости, параллельной заданным прямым и равноудаленной от них. За ось Oz принять общий перпендикуляр к заданным прямым.

739. $d = \dfrac{\sqrt{4r^2-c^2+h^2}}{2}$, в частности $d = \sqrt{5}$.

740. Сфера при $\lambda \neq 1$, плоскость при $\lambda = 1$; λ — данное отношение расстояний.

742. См. указание к задаче 646. Рассмотреть аналогичные формулы для пространства.

743. Плоскость, перпендикулярная к линии центров.

744. Эллипсоид вращения.

745. $\dfrac{2abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$.

746. Эллипсоид. Выразить координаты точки M через направляющие косинусы прямой и заданные длины $a = MA$, $b = MB$, $c = MC$.

747. Двуполостный гиперболоид вращения.

748. За ось Oz принять ось вращения, за ось Ox — общий перпендикуляр к оси и заданной прямой. Однополостный гиперболоид вращения.

749. Однополостный гиперболоид. Координатные векторы аффинной системы координат взять параллельными данным прямым. Через точку M геометрического места и через каждую из данных прямых провести три плоскости и написать условие того, что три плоскости пересекаются по одной прямой.

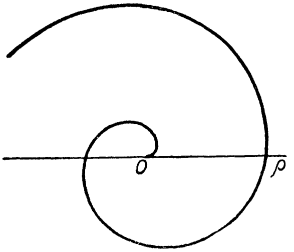
752. Параболоид вращения.

753. Эллиптический или гиперболический параболоид в зависимости от того, совпадает ли направление оси подвижной параболы с положительным или отрицательным направлением оси неподвижной параболы.

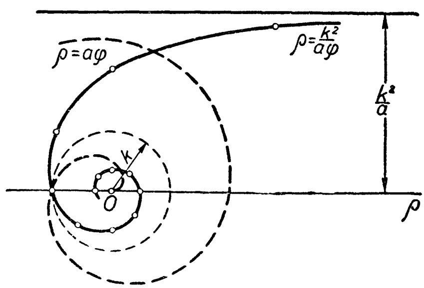
754. Гиперболический параболоид. За ось Oz принять общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым, за начало координат — середину этого перпендикуляра; ось Ox выбрать таким образом, чтобы она составляла с направляющими векторами скрещивающихся прямых равные углы.

756. Конус вращения.

757. Спираль Архимеда $\rho = a\varphi$. За полюс принять точку O, за полярную ось — луч в его начальном положении (черт. 28).



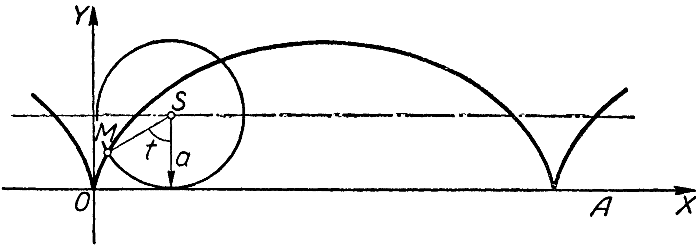
Черт. 28.



Черт. 29.

758. Гиперболическая спираль $\rho = \dfrac{k^2}{a\varphi}$, где k — радиус инверсии (черт. 29).

759. Циклоида: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, где t — угол поворота окружности. За ось Ox принять прямую OA, за начало координат — положение O точки M в тот момент, когда она находится на прямой OA (черт. 30).

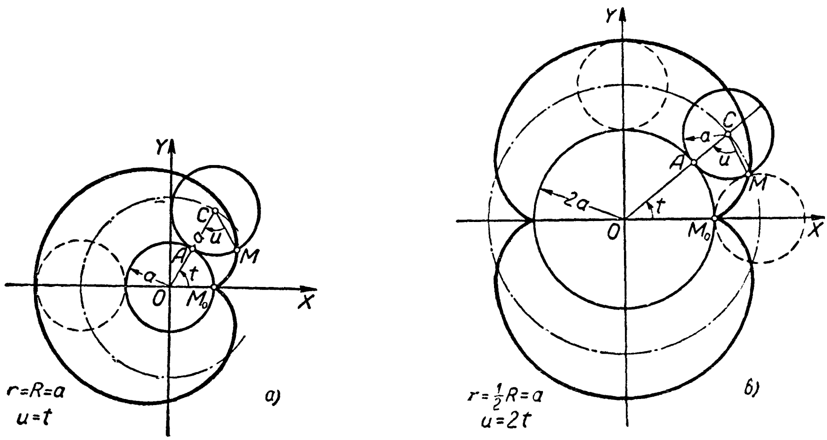


Черт. 30.

760. Эпициклоида: $x = (R + r)\cos t - r\cos\dfrac{R+r}{r}t$;

$$y = (R + r)\sin t - r\sin\frac{R+r}{r}t.$$

В случае а) — кардиоида: $\rho = 2a(1 - \cos t)$ (M_0 — полюс, M_0X — полярная ось). Систему координат выбрать так, как указано на чертеже 31.

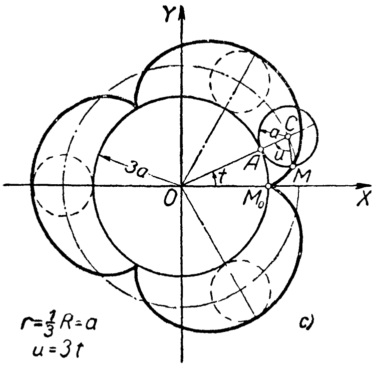


Черт. 31.

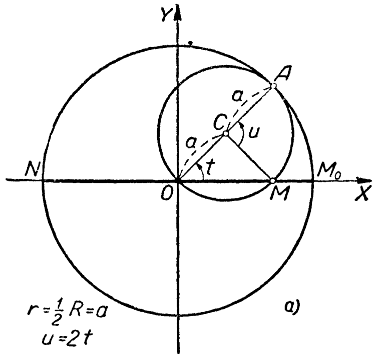
761. Систему координат выбрать так, как указано на чертеже 32.

Гипоциклоида: $x = (R - r)\cos t + r\cos\dfrac{R-r}{r}t$;

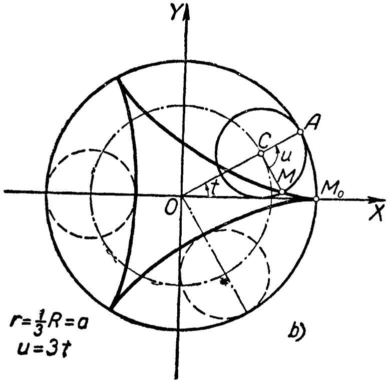
$$y = (R - r)\sin t - r\sin\frac{R-r}{r}t.$$

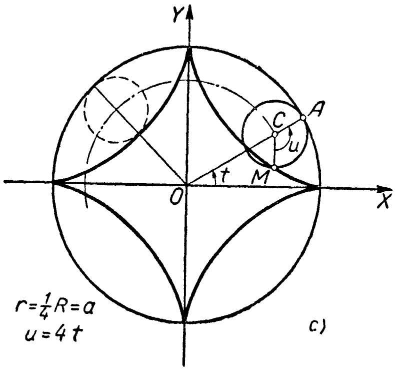


Черт. 31.



Черт. 32.





Черт. 32.

В случае a) — отрезок прямой M_0N; в случае c) — астроида:

$$x = a\cos^3 t;$$
$$y = a\sin^3 t.$$

762. За оси координат приьять прямые OA, OB (черт. 33).

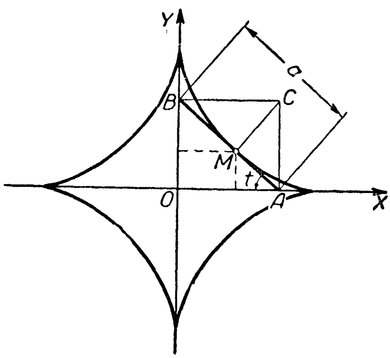
Астроида: $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$ (см. задачу 761, случай c)

763. Полярную систему координат выбрать так, как указано на чертеже 34. Конхоида Никомеда:

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} + b,$$

или $x^2y^2 = (b^2 - x^2)\cdot(y + a)^2$.

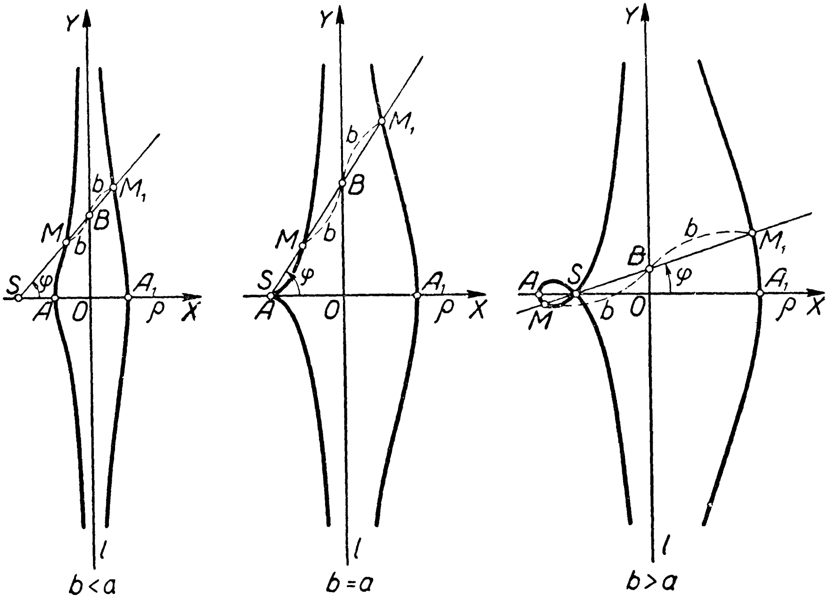
764. Полярную систему координат выбрать так, как указано на чертеже 35.



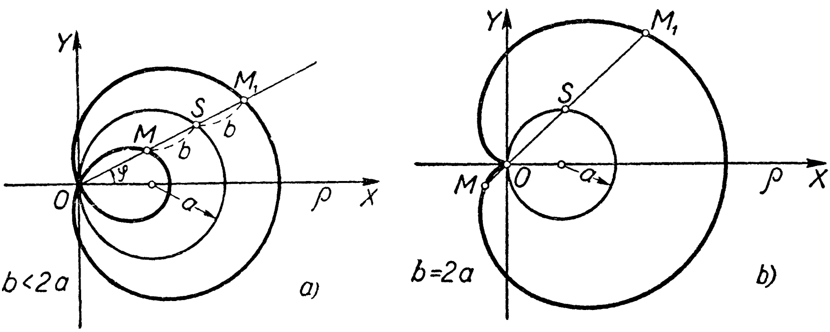
Черт. 33.

Конхоида окружности относительно полюса $O(a)$ или улитка Паскаля: $\rho = 2a\cos\varphi + b$ При $b = 2a$ получается кардиоида: $\rho = 2a(1 + \cos\varphi)$.

Ср. с задачей 760, случай a). **765.** Эллипс $\rho = \dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$ $(e < 1)$ инвертируется



Черт. 34



Черт. 35

в улитку Паскаля: $\rho' = a' \cos\varphi + b'$, где $a' < b'$ (см. задачу 764). Чертеж 36 построен в предположении, что радиус инверсии равен p; тогда $a' = pe$, $b' = p$.

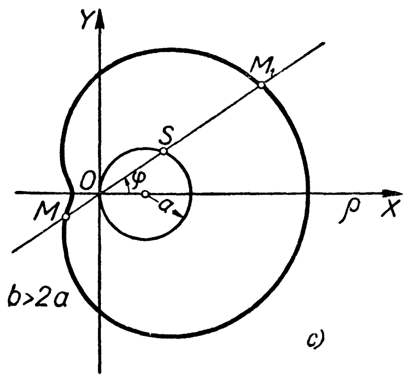
766. Гипербола $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}$ $(e > 1)$ инвертируется в улитку Паскаля $\rho' = a'\cos\varphi + b'$, где $a' > b'$ (см. задачу 764). Чертеж 37 построен в предположении, что радиус инверсии равен p; тогда $a' = pe$, $b' = p$.

767. Парабола $\rho = \dfrac{p}{1 + \cos\varphi}$ инвертируется в кардиоиду: $\rho' = a'(1 + \cos\varphi)$ (см. задачу 764). Чертеж 38 построен для того случая, когда радиус инверсии равен p; тогда $a' = pe$; $b' = p$.

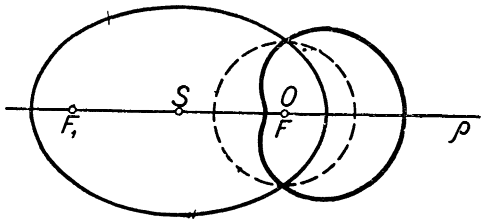
768. Принять за полюс полярной системы координат точку A, а за полярную ось — прямую AS. Улитка Паскаля: $\rho = a\cos\varphi + b$ (см. задачу 764).

769. Сперва составить уравнение траектории в полярных координатах: $\rho = \dfrac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$. Циссоида Диоклеса: $(2a - x)\cdot y^2 = x^3$; система координат указана на чертеже 39.

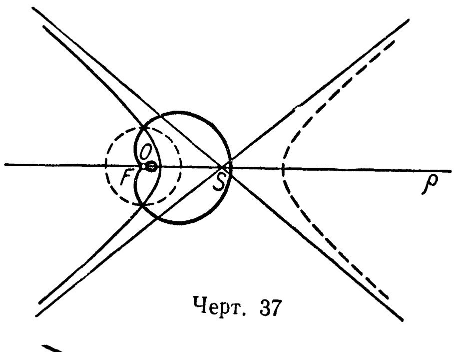
770. За начало декартовых прямоугольных координат принять середину отрезка F_1F, а за ось Ox — прямую F_1F (черт. 40). Овал Кассини: $(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = b^4 - a^4$. При $a = b$ получаем лемнискату Бернулли.



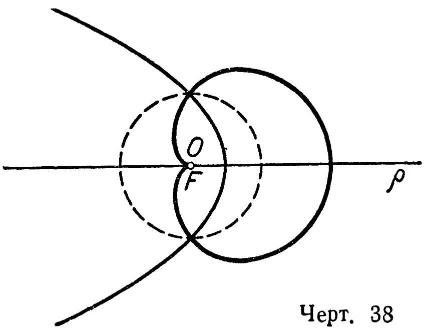
Черт. 35



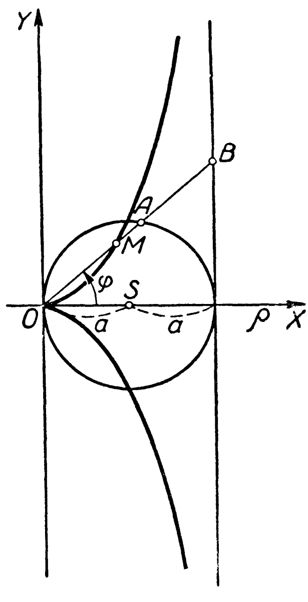
Черт. 36



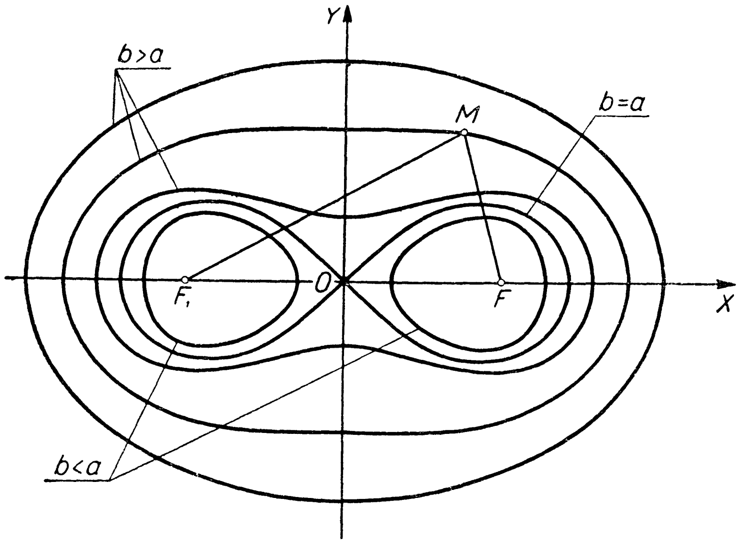
Черт. 37



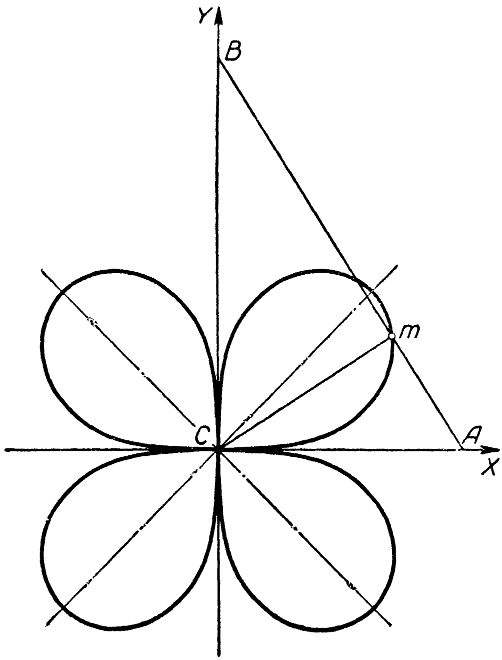
Черт. 38



Черт. 39

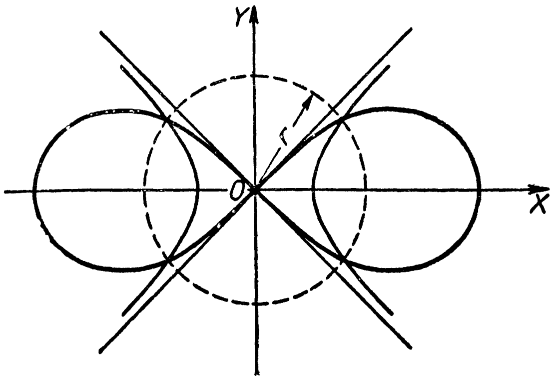


Черт. 40.



Черт. 41.

771. Две данные взаимно перпендикулярные прямые принять за оси координат (черт. 41): $\rho^2 = \pm S \sin 2\varphi$, или $(x^2 + y^2)^2 = \pm 2S \cdot xy$. По-



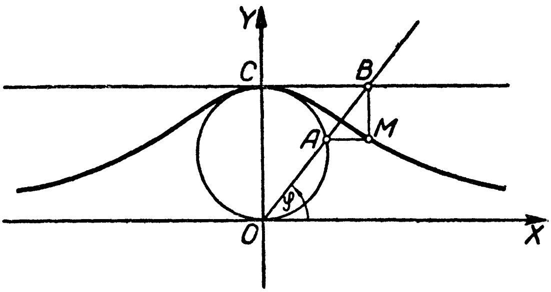
Черт. 42.

лучаем две лемнискаты Бернулли; поворотом осей координат на угол в 45° уравнение приводится к виду, указанному в задаче 770.

772. Лемниската (черт. 42).

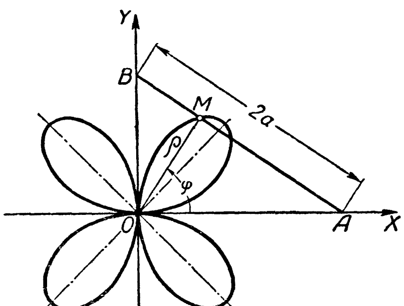
773. За начало прямоугольной декартовой системы координат принять точку O, а за ось Oy — диаметр OC (черт. 43). Верзьера Марии Аньези:

$$\left.\begin{array}{l} x = a \cdot \operatorname{ctg}\varphi \\ y = a \cdot \sin^2\varphi \end{array}\right\} \quad \text{или } y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

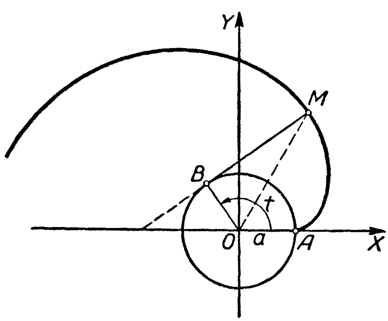


Черт. 43.

774. $\rho = a \sin 2\varphi$, или $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ (четырехлепестковая роза). Полярная и декартова системы координат указаны на чертеже 44.



Черт. 44.



Черт. 45.

775. Оси координат выбрать так, как указано на чертеже 45.

$$x = a(\cos t + t \sin t)$$
$$y = a(\sin t - t \cos t)$$
(эвольвента круга).

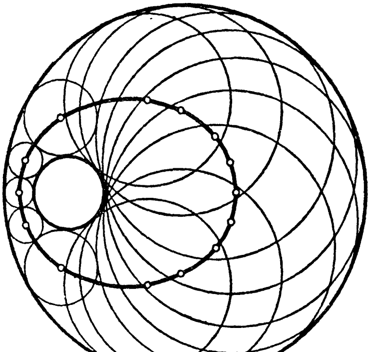
776. а) Эллипс; б) одна ветвь гиперболы; в) парабола (черт. 46).

Выбрать за ось Ox линию центров заданных окружностей, за начало координат — центр одной из них. Найти в координатной форме расстояния от центра подвижной окружности до центров заданных окружностей. Исключить из полученных двух равенств переменный радиус подвижной окружности.

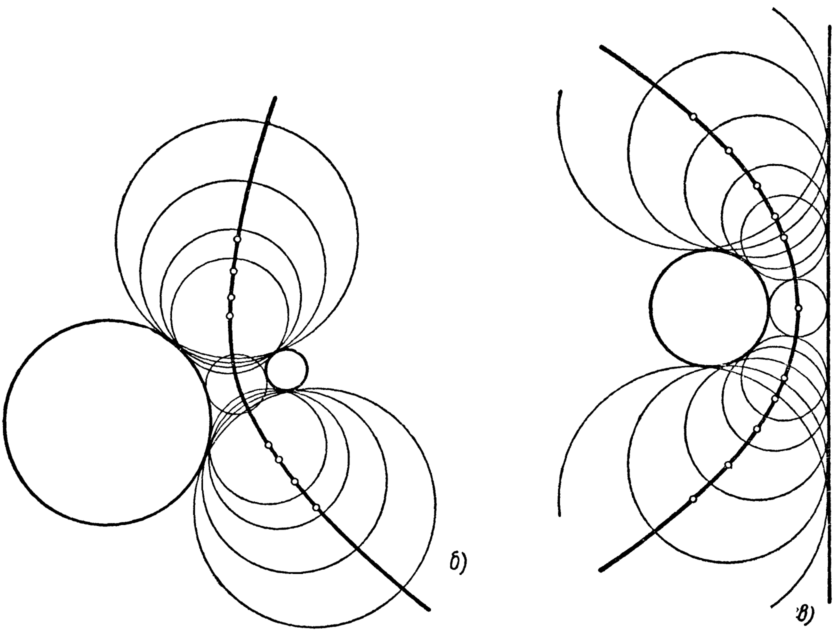
777. Использовать свойство полного четырехугольника.

778. Построить полный четырехугольник, у которого точки A, B будут диагональными, P — вершиной и одна из сторон проходит через точку C, тогда сторона, ей противоположная, будет искомой.

779. Построить точку, четвертую гармоническую к несобственной точке прямой AB относительно пары точек A, B.



а)



Черт. 46

780. Решение состоит из последовательного решения третьей и второй задач. Более простое решение получается, если воспользоваться теоремой Дезарга (ср. с задачей 789).

781. Провести еще одну прямую, параллельную этим прямым, и построить точку C, четвертую гармоническую к A относительно пары точек: B и несобственной точки прямой AB.

782. Построить середину C отрезка AB и четвертую гармоническую точку D к точке B относительно пары точек A, C. AD будет одной третью отрезка AB. Действительно, если $(ACBD) = -1$, то, в силу свойства сложного отношения, $(ABCD) = 2$, т. е $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = 2$, но C — середина отрезка AB, значит, $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{2}$.

783. Задачу будем решать по индукции по числу n: пусть отрезок AB можем разделить на n частей. Как разделить его на $n + 1$ частей? Если AD — $(n + 1)$-я часть отрезка AB, то $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{n}$. С другой стороны, C — середина отрезка AB, поэтому $\frac{AC}{CB} = 1$, и, значит, в силу определения, сложное отношение $(ABCD) = n$, т. е. дело сводится к построению к трем точкам A, B, C такой точки D, чтобы сложное отношение их равнялось n, в предположении, что к трем данным точкам можем построить такую точку E, чтобы сложное отношение $(ACBE)$ равнялось $n - 1$. К точке E относительно пары точек A, C построим четвертую гармоническую точку D. Она будет искомой. Действительно, в силу свойства сложного отношения, $(ACBD) = \frac{(ACBE)}{(ACDE)}$ и, значит, $(ACBD) = 1 - n$, а потому $(ABCD) = n$

784. Найти точку C пересечения прямой l с прямой AB и построить ей четвертую гармоническую точку D относительно пары точек A, B. Из точки D опустить перпендикуляр на прямую l. Его основание будет искомой точкой.

785. Провести прямую $c = SC$. Построить прямую d, четвертую гармоническую к одной из прямых a, b, c относительно двух других, и через C провести прямую, ей параллельную.

786. Пользуясь свойством полного четырехугольника, доказать, что эти диагонали являются медианами исходного треугольника.

787. Спроектировать плоскость чертежа на другую плоскость так, чтобы прямая u перешла в несобственную. Тогда треугольники станут гомотетичными.

788. Каждая пара из этих треугольников удовлетворяет обратной теореме Дезарга, и поэтому порождаются три прямые Дезарга: p_{12} с точками L_{12}, M_{12}, N_{12}; p_{13} с точками L_{13}, M_{13}, N_{13} и p_{23} с точками L_{23}, M_{23}, N_{23} Треугольники $L_{12}L_{13}L_{23}$ и $M_{12}M_{13}M_{23}$ удовлетворяют теореме Дезарга, поэтому прямые p_{12}, p_{13}, p_{23} проходят через одну точку.

789. Через произвольную точку плоскости S провести произвольно три прямые p, q, r. Точки пересечения p с a и a' обозначим через B и B', точки пересечения r с a, a' обозначим через C, C', точки пересечения q с BM и $B'M$ обозначим через A, A', тогда получим два треугольника ABC и $A'B'C'$, удовлетворяющих обратной теореме Дезарга, потому точка пересечения $N = AC \times A'C'$, данная точка M и недоступная точка $L = a \times a'$ лежат на одной прямой, т. е. MN — искомая прямая.

790. Точку пересечения a с b обозначим через C, точку пересечения a' с b' — через C', на прямой CC' произвольно возьмем точку S и проведем через нее две произвольные прямые q, r. Пусть $q \times b = A$, $q \times b' = A'$, $r \times a = B$, $r \times a' = B'$, тогда треугольники ABC и $A'B'C'$ удовлетворяют обратной теореме Дезарга, и потому точка $M = AB \times A'B'$ лежит на искомой прямой. Также пусть $q \times a = \overline{B}$, $q \times a' = \overline{B'}$, $r \times b = \overline{A}$, $r \times b' = \overline{A'}$, тогда треугольники $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C'}$ будут также удовлетворять этой теореме, и, значит, точка $\overline{M} = \overline{AB} \times \overline{A'B'}$ лежит на искомой прямой, т. е. искомой прямой будет $M\overline{M}$.

791. См. решение задачи 790.

792. Пусть $a \times b = C$, $a \times c = B$, $b \times c = A$, $a' \times b' = C'$, на прямой CC' берем произвольно точку S, пусть $SB \times a' = B'$, $SA \times b' = A'$. Тогда $A'B'$ — искомая прямая, так как треугольники ABC и $A'B'C'$ удовлетворяют обратной теореме Дезарга.

793. См. решение задачи 792. **794.** Комбинация задачи 792 и задачи 780.

795. Провести прямые, параллельные сторонам треугольника (см. задачу 793), а потом разделить каждую сторону пополам (см. задачу 779).

796. Построить прямые, параллельные боковым сторонам треугольников (см. задачу 778) и построить прямую, параллельную данной прямой (см. задачу 793).

797. Рассмотрим проективное соответствие на прямой a, являющееся произведением трех перспектив с центрами в точках L, M, N. Вершина искомого треугольника будет двойной точкой этого соответствия.

798. Рассмотрим два перспективных пучка с центрами в точках A и C и осью перспективы u'. На прямых $A'B$ и BC' они высекают два перспективных ряда, для которых L — центр перспективы, а M и K — пара соответствующих точек.

799. Рассмотрим проективное соответствие на окружности, являющееся произведением трех инволюций с центрами в точках L, M, N. Вершина искомого треугольника будет двойной точкой этого соответствия.

800. Задача сводится к предыдущей, когда точки L, M, N несобственные.

801. Задача сводится к задаче 799, когда точка N несобственная.

802. Точка A является двойной точкой проективного соответствия на окружности, являющегося произведением четырех инволюций с центрами в точках K, M, L и M.

803. Задача двойственна задаче 799. **804.** Задача двойственна задаче 802.

805. Через центр O квадрата проведем прямую l', параллельную l, и прямые a, b, параллельные сторонам квадрата (см. задачу 793 и 780). Прямые a, b и AC, BD определяют ортогональную инволюцию. По теореме, двойственной второй теореме Дезарга, строим прямую n', ортогональную к l. Затем проводим через точку P прямые m, n, параллельные прямым l, n' (см. задачу 793).

806. По теореме, двойственной второй теореме Дезарга, из любой точки плоскости противоположные вершины полного четырехсторонника проектируются соответствующими прямыми одной инволюции. Пусть два круга k_1 и k_2, построенные на диагоналях EG, FH, пересекаются в точках A и B. Возьмем точку A, $AE \perp AG$, так как $\angle EAG$ опирается на диаметр EG, также $AH \perp AF$, так как $\angle HAF$ опирается на диаметр AF, следовательно, в силу высказанной теоремы $AK \perp AL$, т. е. окружность k_3, построенная на диагонали KL как на диаметре, проходит через точку A. Для точки B доказательство аналогично.

807. Проведем произвольный диаметр AB окружности. Построим хорду CD, параллельную этому диаметру (см. задачу 778). Пусть $AC \times BD = K$, тогда OK делит эту хорду пополам (см. задачу 777) и, следовательно, будет диаметром, перпендикулярным диаметру AB. В пересечении с окружностью эти два диаметра дадут вершины квадрата, и задача сведется к части задачи 805.

808. Задача сводится ко второй части задачи 805 (см. указания к задаче 807).

809. Через центр окружности проведем прямые OK и OL, параллельные прямым AB и h Через точку B проведем прямую n, параллельную KL. Пусть $n \times h = C$. Треугольники OKL и ABC подобны, и потому $AB \equiv AC$.

810. Проведем через круг k произвольную сферу $\varkappa$, через прямую LM проведем плоскость τ, касательную к сфере в точке S. Проектируя круг k из точки S на плоскость π, параллельную τ, получим опять круг (так как стереографическая проекция переводит круг в круг), а прямая LM перейдет в несобственную. Вписанный шестиугольник будет иметь две пары противоположных параллельных сторон, нужно доказать параллельность третьей пары противоположных сторон.

811. Стороны AC и BC являются соответствующими прямыми двух проективных пучков с центрами в точках N и M. Это проективное соответствие является произведением двух перспектив, с осями перспективы a и b. Значит, точки C образуют кривую 2-го порядка.

812. В этом случае пучки, о которых говорится в указании к задаче 811, перспективны, потому что у них линия центров сама себе соответствует. Поэтому точки C образуют прямую.

813. Стороны углов, пересекающиеся на прямой, образуют перспективные пучки по определению. Другие стороны углов образуют пучки, равные им, а потому проективные между собой, и, значит, точки их пересечения образуют кривую 2-го порядка.

814. Стороны углов, пересекающиеся на окружности, образуют проективные пучки. Дальше см. указание к задаче 813 со второй фразы.

815. Стороны AC и BC образуют два перспективных пучка по определению. Высоты BH и AH образуют пучки, проективные соответственно пучкам AC, BC, значит, они проективны между собой, а потому точки H пересечения их образуют кривую 2-го порядка, причем если прямая l параллельна основанию, то эта кривая — парабола, если не параллельна основанию, то гипербола.

816. См. указание к задаче 815, только в этом случае пучки BH и AH будут перспективны и решением будет прямая.

817. Точки A и D образуют два конгруэнтных ряда. Диагонали CA, BD образуют два пучка, перспективные этим рядам, а потому проективные между собой. Поэтому точки пересечения их образуют кривую 2-го порядка, причем если прямая l параллельна BC, то кривой будет парабола, если не параллельна, то гипербола.

818. См. указание к задаче 817.

819. Стороны AC и BC описывают два пучка прямых 2-го порядка, перспективные двум когруэнтным рядам, описываемым точками A и B, поэтому эти два пучка проективны, но они имеют один и тот же носитель — касаются одной окружности, потому точки пересечения их соответствующих прямых будут образовывать кривую 2-го порядка.

820. Через точку M провести произвольную хорду p, построить ее полюс P; PM будет искомой касательной.

821. Построить поляру данной точки P и соединить ее с точками пересечения этой поляры с окружностью.

822. Построить поляру данной точки P и через P провести прямую, параллельную этой поляре.

823. Построить полюс несобственной прямой. Параллелограмм используется для проведения необходимых параллельных прямых (см. задачу 793).

824. Рассмотрим вписанный шестиугольник, вершинами которого являются точки касания описанного шестисторонника. Спроектируем плоскость чертежа на другую плоскость так, чтобы круг перешел в круг и у этого шестиугольника противоположные стороны были параллельны (см. указание к задаче 810), тогда искомые прямые пройдут через центр окружности — одну точку.

825. Стороны угла описывают два проективных между собой пучка. Поэтому они высекают на окружности два проективных между собой ряда. Прямые, их соединяющие, образуют пучок 2-го порядка — пучок касательных к кривой 2-го порядка.

826. Угол той же постоянной величины φ с вершиной в точке S при вращении описывает два конгруэнтных пучка. Один из них высекает ряд на прямой l, другой — проективный ему ряд на несобственной прямой l^*. Прямые, соединяющие соответствующие точки этих двух рядов, будут вторыми сторонами исходных углов и, значит, они описывают пучок 2-го порядка, в который войдут несобственная прямая l^* и прямая l. Значит, эти стороны являются касательными к параболе, касающейся прямой l.

827. См. указание к задаче 825.

828. Прямые, пересекающие три данные прямые, образуют одно семейство прямолинейных образующих поверхности 2-го порядка, с которой четвертая прямая пересекается, вообще говоря, в двух точках. Две прямолинейные образующие указанного семейства, проходящие через эти точки, будут искомыми прямыми.

829. Проведем две плоскости, соединяющие каждую из данных прямых с их общим перпендикуляром. В каждой плоскости, параллельной биссектральной плоскости этих двух плоскостей, лежит прямая от искомого геометрического места. Таким образом, на искомой поверхности лежат два семейства прямолинейных образующих, параллельных двум плоскостям, т. е. поверхность 2-го порядка — гиперболический параболоид.

830. Применить теорему, двойственную теореме Паскаля по большому принципу двойственности.

831. Проведем плоскость π, перпендикулярную оси v пучка плоскостей. Пусть $S = \pi x v$. Для каждой плоскости α пучка проведем нормаль a через точку S. Пучок нормалей a проективен пучку плоскостей и высекает на несобственной прямой l^* плоскости π ряд точек A^*. Пучок плоскостей высекает на прямой l ряд точек A. Следовательно, эти ряды проективны между собой. Искомые нормали соединяют соответствующие точки их, поэтому образуют линейчатую поверхность 2-го порядка. Поскольку для нее образующей является несобственная прямая, это параболоид.

832. Рассмотрим несобственную прямую u^* плоскости π, перпендикулярной к прямой v. Искомые перпендикуляры n параллельны плоскости π, а потому пересекают прямую u^*. Значит, они пересекают три прямые u, v, u^*, а потому образуют линейчатую поверхность 2-го порядка с несобственной образующей u^* — параболоид.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Ж Адамар, Элементарная геометрия, ч. 1 и 2, Учпедгиз, 1948.

И. И. Александров, Сборник геометрических задач на построение, Учпедгиз, 1950.

«Методическое пособие», ч. 1, Планиметрия, ч. 2, Стереометрия, под редакцией И. К. Андронова, Учпедгиз, 1934.

Б. И. Аргунов и М. Б. Балк, Геометрические построения на плоскости, Учпедгиз, 1955.

К. С. Барыбин, Сборник геометрических задач на доказательство, Учпедгиз, 1952.

К. С. Барыбин и А. К. Исаков, Сборник задач по математике, Учпедгиз, 1952.

В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, Векторы в курсе геометрии, Учпедгиз, 1962.

Н. А. Глаголев. Элементарная геометрия, ч. 1 и 2, Учпедгиз, 1945.

Г. В. Гуревич, Проективная геометрия, Физматгиз, 1960.

Б. Н. Делоне и О. Житомирский, Задачник по геометрии, ГТТИ, 1941.

Б. Н. Делоне, О. Житомирский и А. И. Фетисов, Сборник геометрических задач, Учпедгиз, 1951.

П. Г. Дзык, Сборник стереометрических задач на комбинации тел, Учпедгиз, 1936.

Я. С. Дубнов, Основы векторного исчисления. Гостехиздат, 1952.

О. Житомирский, Проективная геометрия в задачах, Гостехиздат, 1954.

С. Зетель, Геометрия линейки и геометрия циркуля, изд. АПН РСФСР, 1950.

Д. В. Клетеник, Сборник задач по аналитической геометрии, Гостехиздат, 1954.

С. М. Коксетер, Действительная проективная плоскость, Физматгиз, 1959.

В. В. Кутузов, Геометрия, Учпедгиз, 1955.

Л. М. Лоповок, Сборник стереометрических задач на построение, Учпедгиз, 1953.

П. С. Моденов, Аналитическая геометрия, изд. Московского университета, 1955.

Назаров и др., Сборник задач по геометрии, Учпедгиз, 1948

Д. И Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. 1 и 2, ГТТИ, 1948.

Д. И. Перепелкин, Геометрические построения в средней школе, М. — Л., 1947

М. В. Потоцкий, Аналитическая геометрия на плоскости, Учпедгиз, 1956.

Б. В. Романовский, Задачи на построение в стереометрии, Учпедгиз, 1936.

А. А. Савелов, Плоские кривые, Физматгиз, 1960

З. А. Скопец и В. А. Жаров, Задачи и теоремы по геометрии. Планиметрия, Учпедгиз, 1962.

А. Ф. Семенович, Учебное пособие по проективной геометрии, Учпедгиз, 1961.

О. Н. Цубербиллер, Задачи и упражнения по аналитической геометрии, Гостехиздат, 1955

Н. Ф. Четверухин Методы геометрических построений, Учпедгиз, 1938.

К. Х. Шахно, Сборник конкурсных задач по математике, Л., 1951.

И. М. Яглом, Геометрические преобразования. ч. 1, Гостехиздат, 1955, журнал «Математика в школе».

И. М. Яглом и В Г. Ашкинузе, Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, Учпедгиз, 1962.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть III

Задачи элементарной геометрии, решаемые методами аналитической геометрии

Часть IV

Задачи по элементарной геометрии, решаемые методами проективной геометрии

Левон Сергеевич Атанасян, Майя Владимировна Васильева, Григорий Борисович Гуревич, Александр Сергеевич Ильин, Татьяна Леонидовна Козьмина, Ольга Сергеевна Редозубова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *В. Г. Долгополов.*
Обложка художника *Ю. М. Сигова.* Художественный редактор *В. С. Эрденко.*
Технический редактор *Л. Я. Медведев.* Корректор *Н. Н. Петровская*

Сдано в набор 19/I 1970 г. Подписано к печати 20/IV 1970 г. $60 \times 90^1/_{16}$. Печ. л. 6 Типографская № 2. Уч.-изд. л. 6,01. Тираж 40000 (План 1970 г. № 15).

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.
Заказ № 554

Цена 17 коп.